Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba,
příspěvková organizace

STUDIJNÍ OPORA DISTANČNÍHO VZDĚLÁVÁNÍ

ZÁKLADNÍ PRAVIDLA VÝPOČTU MATEMATICKÝCH ÚLOH

ROVNICE A NEROVNICE

MICHAL VAVROŠ

Ostrava 2006

Zpracoval: RNDr. Michal Vavroš, Ph.D.
Recenzenti: RNDr. Radek Krpec, Ph.D.
Mgr. Libor Koníček, PhD.

ISBN 80-903647-9-9

Obsah opory

Úvod

Vážení čtenáři,

máte před sebou studijní text určený pro studenty matematiky prvního ročníku gymnázia v rámci distančního vzdělávání. Tento studijní materiál je volným pokračováním textu Algebraické výrazy. Tematicky je zaměřen na problematiku řešení základních typů rovnic, nerovnic a jejich soustav, se kterými se setkáte v prvním ročníku studia na střední škole, zejména gymnázia.

První kapitola je zaměřena na základní pojmy a metody řešení lineárních a kvadratických rovnic a na úlohy vedoucí k řešení těchto typů rovnic. Jsou zde zmíněny rovnice s absolutními hodnotami, rovnice v součinovém a podílovém tvaru a iracionální rovnice.

Druhá kapitola obsahuje metody řešení nerovnic. Najdete zde lineární a kvadratické nerovnice, nerovnice s absolutními hodnotami a nerovnice v podílovém a součinovém tvaru.

Třetí kapitola studuje základní mechanismy řešení soustav rovnic a nerovnic v rámci učiva prvního ročníku. Jsou zde zmíněny metody sčítací a dosazovací pro soustavy dvou rovnic o dvou neznámých a metoda eliminační pro řešení soustav tří rovnic o třech neznámých.

Cílem textu je, abyste po jeho nastudování zvládali rozlišovat základní typy rovnic, nerovnic a jejich soustav a volit vhodné metody řešení. V opoře vám předkládám základní typy rovnic a nerovnic a metody jejich řešení. Na procvičení a upevnění nabytých dovedností sáhněte i po jiných sbírkách úloh. Tipy na některé sbírky úloh najdete v citované literatuře.

Hodně trpělivosti a vytrvalosti při studiu vám přeje

Michal Vavroš

Po prostudování opory budete znát:

- základní pojmy z oblasti rovnic, nerovnic a jejich soustav,
- základní techniky řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav,
- ekvivalentní úpravy rovnic a nerovnic,
- princip důsledkových úprav.

Po prostudování opory budete schopni:

- orientovat se v základních typech rovnic, nerovnic a jejich soustavách,
- používat ekvivalentní úpravy rovnic a nerovnic,
- používat nejvhodnější metody,
- řešit lineární rovnice a nerovnice,
- řešit kvadratickou rovnici užitím diskriminantu, rovnice s absolutními hodnotami i odmocninami.

Získáte:

- přehled o používaných metodách a technikách při řešení rovnic, nerovnic a jejich soustavách,
- základní početní dovednosti pro téměř všechny další tematické celky,
- efektivní návyky na řešení matematických úloh.

1 Rovnice

<u>**V této kapitole se dozvíte**</u>: *základní pojmy a metody z oblasti řešení rovnic s jednou neznámou, ekvivalentní úpravy rovnic, důsledkové úpravy rovnic .*

<u>**V této kapitole se naučíte**</u>: *rozlišovat jednotlivé druhy rovnic, řešit lineární rovnice o jedné neznámé ekvivalentními úpravami, řešit kvadratické rovnice užitím diskriminantu a vzorců nebo rozkladem, řešit rovnice v součinovém a podílovém tvaru, řešit rovnice s absolutními hodnotami, řešit rovnice s odmocninami důsledkovými úpravami.*

<u>**Klíčová slova kapitoly**</u>: **rovnice, ekvivalentní úpravy rovnic, důsledkové úpravy rovnic, diskriminant.**

<u>**Čas potřebný pro prostudování kapitoly**</u>:

8 + 14 hodiny (teorie + řešení příkladů)

<u>**Průvodce**</u>
Již v úvodu opory jsem napsal, že toto téma vytváří základy početních dovedností téměř pro všechny další tematické celky matematiky. Budu se snažit vás seznámit se všemi typy rovnic, které jsou náplní učiva matematiky prvního ročníku. Hlavním cílem je ukázat použití vhodné metody. V každé kapitole upozorňuji na jinou situaci, která může při řešení příslušného typu rovnice vzniknout.

1.1 Základní metody řešení rovnic

Než přejdu k vysvětlení základních metod řešení rovnic, jen připomenu dva stěžejní pojmy tohoto studijního textu – rovnice a její kořen.

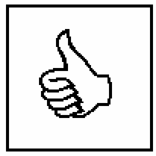
Rovnice

Rovnice (s jednou neznámou) je zápis rovnosti dvou výrazů, zjednodušeně $L(x) = P(x)$, kde x je z daného číselného oboru.

<u>**Průvodce**</u>
Při zápisu rovností výrazů ($L(x)$ výraz na levé straně rovnice a $P(x)$ výraz na pravé straně rovnice) se můžou vyskytovat písmena x, y, z, t apod. Označujeme je jako neznámé.
Příklad: $5 - x = 2x - 7$ nebo $3(t^2 + 5) - t = t^2 + 13$.
Hlavním úkolem – řešením – je nalézt takové hodnoty příslušné proměnné, pro které bude rovnost splněna.

Kořen rovnice

Kořen (řešení) rovnice jsou takové hodnoty z číselného oboru rovnice, pro něž dostaneme platnou rovnost. Někdy říkáme, že číslo, které je řešením rovnice, této rovnici vyhovuje nebo že ji splňuje.



<u>Průvodce</u>
Jako příklad si ukažme, že číslo $x = 4$ je kořenem (řešením) rovnice

$$5 - x = 2x - 7,$$

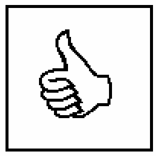
neboť po dosazeni získáme platnou rovnost 1 = 1.
Naproti tomu číslo $x = 5$ není kořenem rovnice, neboť po dosazení

$$5 - 5 \neq 2 \cdot 5 - 7$$
$$0 \neq 3.$$

Hlavní úkol, který nás čeká, je ukázat si různé metody, s jejíž pomocí najdeme všechny kořeny dané rovnice. V zadání většiny úloh se slovo *všechny* zpravidla vynechává. Ale máme tím stále namysli, že našim úkolem je najít všechny kořeny (všechna řešení) dané rovnice.

Ekvivalentní úpravy

Množinu všech kořenů (řešení) rovnice značíme obvykle K, pro neznámé se zpravidla používají písmena z konce abecedy, ale můžou být označeny i jinak.
Hledání kořenů rovnice je proces, při kterém místo dané rovnice píšeme nové rovnice, většinou takové, které mají tatáž řešení, jako původní rovnice. O takové nové rovnici řekneme, že je s tou naší původní rovnicí ekvivalentní. Úpravy, které budeme provádět s příslušnou rovnicí, se nazývají **ekvivalentní úpravy**. A jsou to takové úpravy rovnice, při nichž žádný kořen neztratíme a také obráceně, žádný kořen nedostaneme navíc. Množiny kořenů původní rovnice a nové rovnice jsou si rovny.



<u>Průvodce</u>
Nyní vám ukážu nejpoužívanější ekvivalentní úpravy rovnic. Jen připomínám, že cílem těchto úprav je převést rovnici na jinou rovnici, u které je zcela zřejmé, jaké má řešení.
Jen pro příklad uvažte rovnici $3x + 5 = x + 9$. Po jisté námaze bychom společně přišli na to, že kořenem je číslo $x = 2$. Upravíme-li však rovnici vhodným způsobem

$$\begin{aligned} 3x - x &= 9 - 5 \\ 2x &= 4 \end{aligned},$$

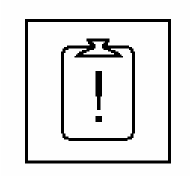
je hledání kořenů mnohem jednodušší, ihned je zřejmé, že řešením rovnice je číslo $x = 2$. Ověření, že $x = 2$ je opravdu kořenem rovnice, si samostatně proveďte dosazením za proměnnou x v původní rovnici.

Mezi **ekvivalentní úpravy** patří:

1. Vzájemná výměna obou stran rovnice.
2. Nahrazení některé strany rovnice výrazem, který je jí roven v celém definičním oboru řešení rovnice.
3. Přičtení téhož čísla nebo výrazu majícího smysl v celém oboru řešení rovnice k jejím oběma stranám.
4. Násobení/dělení obou stran rovnice stejným číslem různým od nuly.

Zkusme si na začátek vyřešit jednu rovnici, na které vám ukážu používání výše zmíněných ekvivalentních úprav. Pro jednoduchost je budu značit E1 – E4.

Příklad



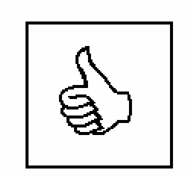
Řešte v R rovnici

$$2x - \frac{5x-3}{4} = \frac{x-5}{4}.$$

Řešení.

Úprava E4, vynásobíme rovnici číslem čtyři; cílem této úpravy je odstranění zlomků

$$4 \cdot 2x - 4 \cdot \frac{5x-3}{4} = 4 \cdot \frac{x-5}{4}.$$



<u>Průvodce</u>

Častou chybou při této úpravě je, že se daným číslem nevynásobí všechny členy příslušné rovnice. Všimněte si, na levé straně rovnice jsou dva členy, výrazy $2x$ a $\frac{5x-3}{4}$; na pravé straně rovnice je pouze jeden výraz $\frac{x-5}{4}$. Podle toho také musím každý člen vynásobit číslem čtyři.

Po zkrácení obou zlomků máme již rovnici bez zlomků ve tvaru

$$8x - (5x-3) = x - 5.$$

Úprava E2, nahrazení levé strany rovnice výrazem, který je jí roven v celém definičním oboru řešení rovnice; cílem této úpravy je zjednodušení levé strany rovnice. Jinými slovy odstraníme závorku a provedeme naznačené operace:

$$\begin{aligned} 8x - 5x + 3 &= x - 5 \\ 3x + 3 &= x - 5 \end{aligned}$$

Úprava E3, přičtení téhož výrazu $-x$ majícího smysl v celém oboru řešení rovnice k jejím oběma stranám; cílem této úpravy je převedení proměnné na jednu stranu rovnice, například na levou stranu:

$$\begin{aligned} 3x + 3 - x &= x - 5 - x \\ 2x + 3 &= -5 \end{aligned}$$

Znovu provedeme úpravu E3, přičteme číslo -3; cílem této úpravy je osamostatnit výraz s proměnnou:

$$\begin{aligned} 2x + 3 - 3 &= -5 - 3 \\ 2x &= -8 \end{aligned}$$

Úprava E4, vynásobíme rovnici číslem $\frac{1}{2}$; cílem této úpravy je odstranění konstanty u proměnné:

$$\begin{aligned} \frac{2x}{2} &= \frac{-8}{2} \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Vidíte, že rovnice má jediné řešení, a to číslo $x = -4$.

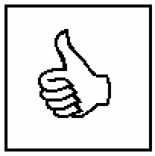
Zápis množiny všech řešení:

$$K = \{-4\}.$$

Důsledkové úpravy

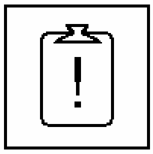
V některých případech, jako jsou rovnice uvedené v podkapitole 1.6, je vhodné převést ji na rovnici, jejímiž řešeními jsou nejen všechna řešení původní rovnice, ale která má i některá další řešení. Takovým to úpravám se říká **důsledkové úpravy**. Přípustnými úpravami jsou pouze takové úpravy, při nichž každý kořen původní rovnice je také kořenem rovnice získané po úpravě.

V této opoře se setkáte s důsledkovou úpravou – umocnění obou stran rovnice přirozeným číslem, nejčastěji na druhou.



Průvodce
Název důsledkové úpravy vystihuje tu skutečnost, že náš kořen je řešením i nové rovnice, ale obráceně to už platit nemusí. Tedy ne každé řešení nové rovnice je řešením i naší původní rovnice. Možná se vám to zdá složité, proč děláme takové úpravy přidávající navíc kořeny, které našim řešením vůbec nejsou.
Podstatou těchto úprav však je, že se nám žádný kořen neztratí!

Jako příklad si ukažme řešení následující rovnice.



Příklad
Řešte v R rovnici

$$\sqrt{x+25} = x+5 .$$

Řešení.
Rovnici řešíme umocněním na druhou, jedině tak jsme schopni pracovat s proměnnou x:

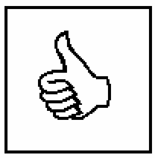
$$\begin{aligned} \sqrt{x+25} &= x+5 \qquad \Big|^2 \\ x+25 &= x^2+10x+25 \\ 0 &= x^2+9x \\ 0 &= x(x+9) \end{aligned}$$

Rozbor poslední úpravy, tj. vytknutí x z výrazu x^2+9x, si nechám na následující kapitoly. Podstatou jsou dvě řešení, která se nám nabízejí:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{nebo} \qquad \begin{aligned} x+9 &= 0 \\ x_2 &= -9 \end{aligned}$$

Zkouška

Jestliže bylo při řešení použito důsledkové úpravy rovnice, která není ekvivalentní úpravou, je **nutnou** součástí řešení **provedení zkoušky** (dosazení nalezených kořenů získané rovnice do původní rovnice).

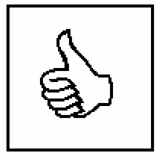


Průvodce
Provedení zkoušky vám doporučuji i v ostatních případech. Velmi jednoduše se přesvědčíte, zda jste se nedopustili nějaké chyby, například numerické. V případě použití důsledkových úprav, nejčastěji umocnění rovnice, je to nezbytně nutné.
V našem příkladu tedy musíme rozhodnou, zda obě řešení jsou řešením i původní rovnice. Zatím máme jen podezření, že by tak mohlo být.
Zkouška se provádí dosazením čísel do původní rovnice.

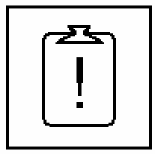
$L(0) = \sqrt{0+25} = \sqrt{25} = 5$
$P(0) = 0+5 = 5$ $\Rightarrow L = P$. Číslo $x = 0$ je kořenem.

$L(-9) = \sqrt{-9+25} = \sqrt{16} = 4$
$P(-9) = -9+5 = -4$ $\Rightarrow L \neq P$. Číslo $x = -9$ není kořenem.

Závěr: $K = \{0\}$.



Průvodce
Studenti se často dopouštějí i opačné chyby. Provedou takovou úpravu, že rovnice, z této úpravy vzniklá, má pouze některá řešení původní rovnice. Nikoliv však všechna.
Chybnou úpravou se stává především dělení rovnice výrazem s proměnnou, jakési krácení rovnice.
Ukažme si to na následujícím příkladu.



Příklad
Řešte v R rovnici

$$(x+2)(x-1) = x-1.$$

Řešení.
Obvyklou **chybnou** úpravou je provedení „krácení" rovnice výrazem $x-1$.

$$(x+2)(x-1) = x-1 \qquad | \; :(x-1)$$

Po úpravě:

$$x+2 = 1$$
$$x = -1$$

Množina kořenů se zdá být pouze jednoprvková, $K = \{-1\}$, ale snadno se přesvědčíme, že množina kořenů je dvouprvková, $K = \{-1;1\}$.

A v čem byla chyba?
V použití úpravy E4, dělení obou stran rovnice nenulovým výrazem $x-1$. Úprava je v pořádku jen pro $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$. Přitom $x=1$ je kořenem rovnice (proveďte samostatně dosazením)

$$(x+2)(x-1) = x-1,$$

není však řešením rovnice

$$x+2 = 1$$

vzniklé po úpravě.

V závěru vám uvedu stručnou klasifikaci (druhy) rovnic, kterými se budu v této opoře zabývat. Podotýkám, že se nejedná o kompletní výčet rovnic.

Budeme společně řešit tyto rovnice s neznámou x:

- **lineární rovnice**

$$ax+b=0, \quad a,b \in R,$$

složitější rovnice vedoucí k řešení lineární rovnice, lineární rovnice s absolutní hodnotou

- **kvadratické rovnice**

$$ax^2+bx+c=0, \quad a,b,c \in R, a \neq 0,$$

složitější rovnice vedoucí k řešení kvadratické rovnice, kvadratické rovnice s absolutní hodnotou,
- **iracionální rovnice**, tj. rovnice, které obsahují odmocniny z neznámé nebo z výrazů s neznámou, například úloha 1.2.

1.2 Lineární rovnice

Lineární rovnice

Rovnice

$$ax + b = 0, \quad a, b \in R$$

se nazývá **lineární rovnice** s neznámou x.

<u>Průvodce</u>
V některých učebnicích se často setkáte s tím, že i jiné rovnice se nazývají lineární. Je to proto, že se snadno převedou na rovnici typu $ax + b = 0$. Pro nás však není podstatné, které rovnice jsou ještě lineární a které už ne. Je ale podstatné, zda umíme rovnici převést úpravami (i důsledkovými) na lineární rovnici, kterou následně snadno vyřešíme, nebo ne.

Než přejdu na ukázku řešení několika lineárních rovnic, ještě se zmíním o dvou konkrétních situacích, které můžou při řešení nejen lineárních rovnic nastat.

Příklad
Řešte následující rovnici v R:

$$2x - \frac{6x-3}{4} = \frac{2x-5}{4}.$$

Řešení.
Úpravy provedu analogicky jako v úloze 1.1, nejprve odstraním zlomky, poté na levé straně odstraním závorku a upravím rovnici tak, aby neznámá x byla na levé straně rovnice a číselné výrazy vpravo:

$$\begin{aligned} 2x - \frac{6x-3}{4} &= \frac{2x-5}{4} \\ 8x - (6x-3) &= 2x-5 \\ 2x+3 &= 2x-5 \\ 0 \cdot x &= -8 \end{aligned}$$

<u>Průvodce</u>
Sami vidíte, že na levé straně rovnice máme součin čísla 0 a výrazu x, který má být roven číslu -8. Snadno uvážíme, že tato situace nemá řešení. Nenajdeme totiž žádné reálné číslo, které po vynásobení nulou bude rovno -8. Množina kořenů je tudíž prázdná.

Zápis řešení: $K = \emptyset$.

Příklad
Řešte v R následující rovnici

$$(x-1)^2 - (x+1)^2 = -4x.$$

Řešení.
Postupů je v tomto případě více. Nejprve umocním závorky na levé straně rovnice podle vzorců a provedu příslušné algebraické operace s mnohočleny:

$$\begin{aligned}(x-1)^2-(x+1)^2 &= -4x\\ x^2-2x+1-x^2-2x-1 &= -4x\\ -4x &= -4x\\ 0\cdot x &= 0\end{aligned}$$

Průvodce
Není potřeba složité úvahy, abychom zjistili (třeba dosazováním), že kořenů je více. V podstatě libovolné reálné číslo, když vynásobíte nulou, dostanete nulu. A skutečně, řešením je každé reálné číslo, tedy $x \in (-\infty;\infty)$.

Zápis řešení: $K = R$.

Průvodce
Jen vám shrnu možnosti řešení lineární rovnice. Jsou tři.
1/ řešením je jedno reálné číslo:

$$\begin{aligned}7x-5 &= 3x+11\\ 4x &= 16 \quad \Rightarrow \quad K=\{4\}\\ x &= 4\end{aligned}$$

2/ řešením je prázdná množina, tedy rovnice nemá žádné řešení:

$$\begin{aligned}7(x-2)-x &= 3(2x+11)\\ 6x-14 &= 6x+33 \quad \Rightarrow \quad K=\emptyset\\ 0\cdot x &= 47\end{aligned}$$

3/ řešením je každé reálné číslo, tedy nekonečně mnoho řešení:

$$\begin{aligned}2(x+2)-6 &= 8x-3(2x+\tfrac{2}{3})\\ 2x-2 &= 8x-6x-2 \quad \Rightarrow \quad K=R\\ 0\cdot x &= 0\end{aligned}$$

Příklad
Řešte v R rovnice:

a) $8(3x-5)-5(2x-8)=20+4x$

b) $\frac{1}{2}\left(3x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(4x-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}(6x-5)-\frac{2}{3}$

c) $\frac{6+25x}{15}-(x-1)=\frac{2x}{3}+\frac{7}{5}$

Řešení.
a) Provedu roznásobení závorek na levé straně rovnice a provedu naznačené operace:

$$\begin{aligned}8(3x-5)-5(2x-8) &= 20+4x\\ 24x-40-10x+40 &= 20+4x\\ 14x &= 20+4x\\ 10x &= 20\end{aligned}$$

Odtud máme výsledek $x=2$. Tedy $K=\{2\}$.

b) Provedu odstranění zlomků před závorkami tím, že rovnici vynásobím nejmenším společným násobkem čísel 2, 3 a 4, tj. 12. Potom provedu naznačené operace s převodem výrazů s proměnnou na levou stranu a zbylé číselné výrazy na pravou stranu rovnice:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(3x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(4x-\frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{4}(6x-5)-\frac{2}{3}\\
12\cdot\frac{1}{2}\left(3x-\frac{1}{2}\right)-12\cdot\frac{1}{3}\left(4x-\frac{1}{3}\right) &= 12\cdot\frac{1}{4}(6x-5)-12\cdot\frac{2}{3}\\
18x-3-16x+\frac{4}{3} &= 18x-15-8\\
-16x+\frac{4}{3} &= -20\\
-16x &= \frac{-64}{3}\\
x &= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Výsledek: $K=\left\{\frac{4}{3}\right\}$.

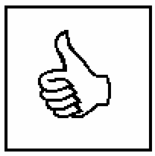
c) Odstraním zlomky vynásobením rovnice číslem 15 a opět provedu naznačené operace, proměnnou budu soustřeďovat na levé straně rovnice:

$$\begin{aligned}
\frac{6+25x}{15}-(x-1) &= \frac{2x}{3}+\frac{7}{5}\\
6+25x-15(x-1) &= 5\cdot 2x+3\cdot 7\\
21+10x &= 10x+21\\
0\cdot x &= 0
\end{aligned}$$

Výsledek: $K=R$, rovnice má nekonečně mnoho řešení.

Zkoušku dosazením libovolného reálného čísla si můžete provézt samostatně jako cvičení.

Dalším případem je řešení lineárních rovnic v daných množinách. Tedy situace, kdy oborem řešení rovnice není celá množina reálných čísel, ale jen její část.



<u>Průvodce</u>

Princip řešení se samozřejmě nemění. Zůstává naše snaha eliminovat proměnnou na jedné straně rovnice. Nesmíme však zapomenout porovnat množinu kořenů s definičním oborem dané rovnice.

Příklad.

Řešme rovnici $1-2x=3-(2-2x)$ v oboru přirozených čísel.

Snadno nahlédnete, že po úpravě:

$$\begin{aligned}
1-2x &= 1+2x\\
-4x &= 0
\end{aligned}$$

Tedy řešením by mohlo být $x=0$. Nula ale není přirozené číslo, proto rovnice nemá řešení, $K=\emptyset$.

Pro názornost ještě jednoduchá úloha, na které si procvičíte posuzování, zda vypočítané x je kořenem rovnice v příslušném oboru řešení nebo ne.

Příklad

Řešte rovnici $-11x+8=0$:

a) v R

b) v Z

c) v intervalu $\langle 0;3{,}2)$

d) v intervalu $\left(-1;\dfrac{8}{11}\right)$

Řešení.

Rovnici řešíme osamostatněním neznámé x na levé straně rovnice, tedy rovnou píšu $x=\dfrac{8}{11}$.

A nyní zjišťuji, do kterého oboru řešení rovnice patří $x=\dfrac{8}{11}$. Uvědomte si, že zlomek $\dfrac{8}{11}$ není ani celé číslo, ani není součástí intervalu $\left(-1;\dfrac{8}{11}\right)$, neboť tento interval je zprava otevřený a tudíž jeho pravý krajní bod $\dfrac{8}{11}$ tam nepatří.

Výsledek: a) $K=\left\{\dfrac{8}{11}\right\}$, b) $K=\emptyset$, c) $K=\left\{\dfrac{8}{11}\right\}$, d) $K=\emptyset$.

Příklad

Řešte rovnice v daných množinách:

a) $3\left(\dfrac{1}{3}+2x\right)-2\left(\dfrac{1}{3}-3x\right)-\dfrac{13}{2}=0$ jednak v R, jednak pro $x\in\langle -1;1{,}5)$

b) $a-\dfrac{2-\frac{3a}{4}}{5}-9=\dfrac{6-\frac{a}{7}}{8}$ pro $a\in\langle 1;4\rangle$

c) $x\sqrt{5}-1=x+2$ jednak v množině N, jednak v množině R

Řešení.

a) Rovnici vynásobím šesti a provedu naznačené operace, proměnnou x ponechám na levé straně rovnice:

$$\begin{aligned}
3\left(\frac{1}{3}+2x\right)-2\left(\frac{1}{3}-3x\right)-\frac{13}{2} &= 0\\
3\cdot 6\left(\frac{1}{3}+2x\right)-2\cdot 6\left(\frac{1}{3}-3x\right)-6\cdot\frac{13}{2} &= 0\\
6+36x-4+36x-39 &= 0\\
72x &= 37\\
x &= \frac{37}{72}\doteq 0{,}514
\end{aligned}$$

Posoudím, zda číslo $\dfrac{37}{72}$ je součástí oboru řešení rovnice.

Výsledek: $K=\left\{\dfrac{37}{72}\right\}$ je v obou případech stejné.

b) Odstraním zlomky vynásobením rovnice číslem 40:

$$\begin{aligned}
a-\frac{2-\frac{3a}{4}}{5}-9 &= \frac{6-\frac{a}{7}}{8}\\
40\cdot a-40\cdot\frac{2-\frac{3a}{4}}{5}-40\cdot 9 &= 40\cdot\frac{6-\frac{a}{7}}{8}\\
40a-16+6a-360 &= 30-\frac{5}{7}a\\
46a+\frac{5}{7}a &= 406\\
\frac{327}{7}a &= 406
\end{aligned}$$

Odkud $a=\frac{2842}{327}\doteq 8{,}691$. Naše řešení není z oboru řešení rovnice a tedy množina kořenů je prázdná, $K=\emptyset$.

c) Upravíme rovnici tak, že na levou stranu rovnice soustředíme výrazy s proměnnou, na druhou stranu číselné výrazy:

$$\begin{aligned}
x\sqrt{5}-1 &= x+2\\
x\sqrt{5}-x &= 3\\
x\left(\sqrt{5}-1\right) &= 3\\
x &= \frac{3}{\sqrt{5}-1}
\end{aligned}$$

Prozatímní výsledek ještě usměrníme:

$$x=\frac{3}{\sqrt{5}-1}=\frac{3\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}=\frac{3\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}$$

V případě řešení v oboru přirozených čísel je množina kořenů prázdná, $K=\emptyset$.

Ve druhém případě je kořenem vypočítané x, $K=\left\{\frac{3\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}\right\}$.

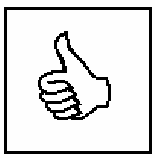
Zkoušky si proveďte samostatně.

<u>Průvodce</u>
Nyní vám ukážu složitější rovnice vedoucí k řešení lineární rovnice. Hlavní problém je v tom, že neznámá bude ve jmenovateli.

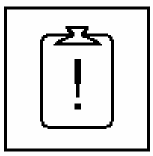
Příklad rovnice: $\frac{3x-2}{x}=4$. Zlomek odstraníme násobením rovnice $x, x\neq 0$;

$\begin{aligned} 3x-2 &= 4x\\ -2 &= x\end{aligned}$. Řešení $x=-2$ je v souladu s podmínkou, tedy $K=\{-2\}$.

Nesmíte zapomenout na podmínky! Výsledek vždy porovnejte s touto podmínkou!



Příklad



Řešme v R následující rovnice s neznámou ve jmenovateli:

a) $\frac{2x-4}{x+2}=6$

b) $\dfrac{5t-20}{t-4}=9$

Řešení.

a) Za podmínky $x \neq -2$ rovnici vynásobím výrazem $x+2$, pak upravím:

$$\begin{aligned}(x+2)\cdot\frac{2x-4}{x+2} &= 6(x+2)\\ 2x-4 &= 6x+12\\ -4x &= 16\\ x &= -4\end{aligned}$$

Výsledek: V souladu s podmínkou je $K=\{-4\}$.

b) Za předpokladu, že výraz $t-4$ je nenulový, tj. $t \neq 4$, tímto výrazem rovnici vynásobíme:

$$\begin{aligned}(t-4)\cdot\frac{5t-20}{t-4} &= 9(t-4)\\ 5t-20 &= 9t-36\\ -4t &= -16\\ t &= 4\end{aligned}$$

Vzhledem k podmínce je množina kořenů prázdná, $K=\emptyset$.

Průvodce
To, proč číslo $t=4$ není ve skutečnosti kořenem rovnice, vychází z počáteční podmínky v úvodu řešení. Nemůžeme provést zkoušku správnosti řešení dosazením, neboť ve jmenovateli bychom obdrželi nulu. A to je věc zcela nepřípustná.

V následujících úlohách vám ukážu řešení složitějších rovnic s neznámou ve jmenovateli.

Průvodce
Princip řešení je stále stejný:

- stanovit podmínky řešitelnosti (u každého lomeného výrazu),
- odstranit jmenovatele, tady je potřeba si dávat pozor, aby to, čím budete násobit příslušnou rovnici, byl skutečně nejmenší společný násobek všech jmenovatelů),
- eliminace proměnné na jedné straně rovnice a její vyjádření,
- porovnat vypočítané řešení s podmínkami rovnice.

Příklad
Řešme v R následující rovnice s neznámou ve jmenovateli:

a) $\dfrac{12}{1-9x^2}=\dfrac{1-3x}{1+3x}+\dfrac{1+3x}{3x-1}$

b) $\dfrac{12x^2+30x-21}{16x^2-9}=\dfrac{3x-7}{3-4x}+\dfrac{6x+5}{4x+3}$

c) $\dfrac{3}{x-3}+\dfrac{5}{x-5}-\dfrac{34}{x^2-8x+15}=0$

d) $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{5}{x^2+6}$

Řešení.

a) Budu postupovat podle výše uvedeného průvodce. Společný násobek výrazů $1-9x^2=(1-3x)(1+3x), 1+3x, 3x-1=-(1-3x)$ je tedy výraz $1-9x^2$ s tím, že z posledního lomeného výrazu je nutné vytknout mínus:

$$\begin{aligned}
\frac{12}{1-9x^2} &= \frac{1-3x}{1+3x}-\frac{1+3x}{1-3x} && \Big|\cdot(1-3x)(1+3x)\\
12 &= (1-3x)(1-3x)-(1+3x)(1+3x) && x\neq\pm\frac{1}{3}\\
12 &= 1-6x+9x^2-\left(1+6x+9x^2\right)\\
12 &= 1-6x+9x^2-1-6x-9x^2\\
12 &= -12x && \Big|:(-12)\\
-1 &= x
\end{aligned}$$

Výsledek: $K=\{-1\}$ v souladu s podmínkou.

b) Zcela analogicky, nejmenší společný násobek všech jmenovatelů je $16x^2-9$, neboť $-(4x-3)\cdot(4x+3)=-\left(16x^2-9\right)$. Další postup:

$$\begin{aligned}
\frac{12x^2+30x-21}{16x^2-9} &= -\frac{3x-7}{4x-3}+\frac{6x+5}{4x+3} && \Big|\cdot(4x-3)(4x+3)\\
12x^2+30x-21 &= -(3x-7)(4x+3)+(6x+5)(4x-3) && x\neq\pm\frac{3}{4}\\
12x^2+30x-21 &= -\left(12x^2-19x-21\right)+24x^2+2x-15\\
12x^2+30x-21 &= 12x^2+21x+6\\
9x-21 &= 6\\
9x &= 27 && \Big|:9\\
x &= 3
\end{aligned}$$

Výsledek: $K=\{3\}$ v souladu s podmínkou.

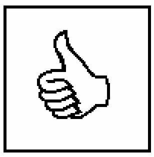
c) Opět si všimnu, že $(x-3)(x-5)=x^2-8x+15$. Tedy tím, čím budu rovnici násobit, je výraz $(x-3)(x-5)$:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x-3}+\frac{5}{x-5}-\frac{34}{x^2-8x+15} &= 0 && \Big|\cdot(x-3)(x-5)\\
3(x-5)+5(x-3)-34 &= 0 && x\neq 3;5\\
3x-15+5x-15 &= 34\\
8x &= 64 && \Big|:8\\
x &= 8
\end{aligned}$$

Výsledek: $K=\{8\}$ v souladu s podmínkou. Zkoušky proveďte samostatně.

Průvodce

V následující úloze vám ukážu řešení, která vedou k závěru, že rovnice nemá žádné řešení, nebo naopak, rovnice bude mít nekonečně mnoho řešení. Postup je zcela analogický, jen si dávejte velký pozor na závěr řešení.



Příklad

Řešme v R:

a) $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{2}{x+2}-1=\dfrac{6}{x^2+x-2}$

b) $\dfrac{3+4x}{x^2+x}-1=\dfrac{3}{x}-\dfrac{x}{x+1}$

Řešení.

a) Všimnu si, že $(x-1)(x+2)=x^2+x-2$. Tedy společný jmenovatel je přímo jmenovatel výrazu na pravé straně rovnice:

$$\begin{array}{rcll}
\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{2}{x+2}-1 & = & \dfrac{6}{x^2+x-2} & \big|\cdot(x-1)(x+2) \\
(x+1)(x+2)+2(x-1)-1(x^2+x-2) & = & 6 & x\neq 1;-2 \\
x^2+3x+2+2x-2-x^2-x+2 & = & 6 & \\
4x & = & 4 & \\
x & = & 1 &
\end{array}$$

Výsledek: $K=\emptyset$, přestože jsem vypočítal $x=1$. Ale v důsledku podmínky rovnice řešení nemá. Sami si vyzkoušejte dosazení $x=1$. Ve dvou případech dostanete ve jmenovateli nulu.

b) Postup zopakuji.

Společný jmenovatel je $x(x+1)=x^2+x$:

$$\begin{array}{rcll}
\dfrac{3+4x}{x^2+x}-1 & = & \dfrac{3}{x}-\dfrac{x}{x+1} & \big|\cdot x(x+1) \\
3+4x-1\left(x^2+x\right) & = & 3(x+1)-x\cdot x & x\neq 0;-1 \\
3+4x-x^2-x & = & 3x+3-x^2 & \\
3x-3x & = & 3-3 & \\
0\cdot x & = & 0 &
\end{array}$$

Zdálo by se, že řešením jsou všechna reálná čísla. Nesmíme však zapomenout na podmínky, za kterých jsme mohli rovnici vynásobit.

Výsledek: $K=R-\{0;-1\}$

Zkoušku dosazením si můžete provézt samostatně jako cvičení. Provedete ji pro libovolné reálné číslo kromě čísla 0 a -1.

Průvodce

V poslední úloze části lineární rovnice vám ukážu řešení několika rovnic, které jsou zadány mírně odlišně než rovnice předcházející. Sami zjistíte, že v tom ale není žádný velký problém.

Příklad

Řešme v R:

a) $x:(x+9)=4:7$

b) $\dfrac{\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}}{\dfrac{3}{2}x-1}+\dfrac{\dfrac{5}{3}x-\dfrac{4}{3}}{x-\dfrac{2}{3}}=2$

Řešení.

a) Naznačené dělení přepíšu jako zlomek (lomený výraz), zapíšu podmínku:

$$\frac{x}{x+9}=\frac{4}{7}$$

Mám rovnici, kterou vyřeším stejným postupem jako v předcházejících úlohách:

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{x}{x+9} & = & \dfrac{4}{7} & \big| \cdot 7(x+9) \\ 7x & = & 4(x+9) & x \neq -9 \\ 3x & = & 36 & \\ x & = & 12 & \end{array}$$

Výsledek: $K=\{12\}$. Zkoušku proveďte samostatně.

b) Zadání druhé rovnice vypadá velmi široké, nicméně si všimneme, že se zde vyskytují složené zlomky, které mají jmenovatele 2 nebo 3. Postupů je jistě více, nebudu vám je tady všechny ukazovat. První lomený výraz rozšířím šesti, druhý třemi:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{6\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}\right)}{6\left(\dfrac{3}{2}x-1\right)}+\dfrac{3\left(\dfrac{5}{3}x-\dfrac{4}{3}\right)}{3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)} & = & 2 \\ \dfrac{4x-2}{9x-6}+\dfrac{5x-4}{3x-2} & = & 2 \end{array}$$

Společný jmenovatel obou lomených výrazů je $9x-6=3(3x-2)$:

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{4x-2}{9x-6}+\dfrac{5x-4}{3x-2} & = & 2 & \big| \cdot 3(3x-2) \\ 4x-2+3(5x-4) & = & 6(3x-2) & x \neq \dfrac{2}{3} \\ 4x-2+15x-12 & = & 18x-12 & \\ 19x & = & 18x+2 & \\ x & = & 2 & \end{array}$$

Výsledek: $K=\{2\}$. Zkoušku proveďte samostatně.

Úloha 1.1

Řešte rovnice. Pokud nebude řečeno jinak, řešte v R:

a) $x-4[x-2(x+6)]=5x+3$

b) $\dfrac{6+25x}{12}-(x-1)=\dfrac{2x}{3}+\dfrac{7}{4}$

c) $2(x+3)-3\left(\dfrac{1}{4}x+2\right)=\dfrac{x+11}{8}$ v intervalu $\left(-3;1\right\rangle$

d) $\dfrac{5}{2x-3}-\dfrac{3x-8}{4x-6}=\dfrac{7}{9}-\dfrac{6x-1}{10x-15}$

e) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+x}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+x}$

f) $(3+x):(3-x)=5:3$

Návod a řešení naleznete v kapitole 1.7

Úloha 1.2

Obvod trojúhelníku je 104 cm. Jedna jeho strana je o 6 cm delší než druhá a o 8 cm kratší než třetí strana. Určete délky stran.

Návod a řešení naleznete v kapitole 1.7

Úloha 1.3

Kolik litrů vody 48 ^{0}C teplé je nutno přidat do 1,2 hl vody 8 ^{0}C teplé, aby směs měla teplotu 24 ^{0}C?

Návod a řešení naleznete v kapitole 1.7

Úloha 1.4

Ze dvou míst vzájemně vzdálených 285 km vyjela proti sobě dvě nákladní auta. První auto ujede za hodinu 30,5 km, druhé 40,75 km. Kdy a v jaké vzdálenosti se potkají?

Návod a řešení naleznete v kapitole 1.7

1.3 Kvadratické rovnice

Kvadratická rovnice

Rovnice

$$ax^2+bx+c=0,\quad a,b,c\in R,\ a\neq 0$$

se nazývá **kvadratická rovnice** s neznámou x. Čísla a,b,c se nazývají **koeficienty kvadratické rovnice**. Výraz ax^2 se nazývá **kvadratický člen**, bx **lineární člen**, c **absolutní člen** kvadratické rovnice.

<u>Průvodce</u>

Kvadratický koeficient a je vždy nenulový. Mohou nastat případy, kdy buď $b=0$ nebo $c=0$. Rovnice bude neúplná.

Je-li $b=0$, rovnici nazveme **ryze kvadratickou**, a má tvar

$$ax^2+c=0.$$

Je-li $c=0$, rovnici nazveme **bez absolutního členu**, a má tvar

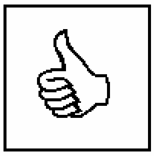
$$ax^2+bx=0.$$

Příklady takových kvadratických rovnic:

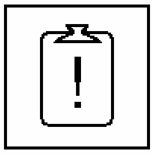
$$2x^2+3x-5=0$$
$$4x^2-9=0$$
$$-x^2+11x=0$$

Po úpravách a zjednodušení musí v rovnici zůstat člen s x^2, aby rovnice byla kvadratickou.

Ryze kvadratickou rovnici typu $ax^2+c=0$ řešíme odečtením absolutního členu od obou stran rovnice.

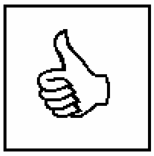


Průvodce
Ve své podstatě převedete absolutní člen na druhou stranu rovnice.
Příklad $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1$ nebo $2x^2 + 26 = 0 \rightarrow x^2 = -\frac{26}{2} = -13$
Další postup závisí na znaménku pravé strany.



Příklad
Řešte v R rovnice:
a) $x^2 - 1 = 0$
b) $2x^2 + 26 = 0$
Řešení.
Obě rovnice řeším dle průvodce výše:
a)

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

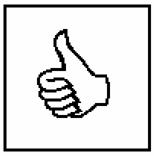


Průvodce
Velký pozor si dávejte na řešení rovnic typu $x^2 = 1$, které mají **dvě řešení.** Neboť nejen $1^2 = 1$, ale též $(-1)^2 = 1$. Proto má rovnice dva kořeny $x_1 = 1, x_2 = -1$.

Výsledek: $K = \{1; -1\}$.

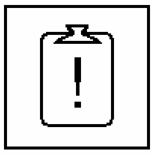
b)

$$\begin{aligned} 2x^2 + 26 &= 0 \\ 2x^2 &= -26 \\ x^2 &= -13 \end{aligned}$$



Průvodce
Toto je druhý případ, kdy naopak rovnice žádné řešení nemá. Důvod je ten, že žádné reálné číslo, když jej umocníte na druhou, nebude rovno zápornému číslu.

Výsledek: $K = \emptyset$.



Příklad
Řešte v R rovnice:
a) $4x^2 - 16 = 0$
b) $5 + x^2 = 0$
c) $-3x^2 + 6 = 0$

Řešení:

a)

$$\begin{aligned} 4x^2 &= 16 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 5 + x^2 &= 0 \\ x^2 &= -5 \\ x &\in \emptyset \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} -3x^2 &= -6 \\ x^2 &= 2 \\ x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Příklad

Propast je hluboká 160 m. Za jak dlouho dopadne kámen vhozený do propasti na její dno?

Řešení.

Z fyziky známe vztah pro dráhu pohybu rovnoměrně zrychleného pohybu jako $s = \frac{1}{2}gt^2$, $g = 10$ ms^{-2}. Po dosazení:

$$\begin{aligned} 160 &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 \\ 160 &= 5t^2 \\ 32 &= t^2 \\ \pm 4\sqrt{2} &= t \quad \Rightarrow t = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Výsledek: Kámen dopadne za $4\sqrt{2}$ s.

Rovnici bez absolutního členu typu $ax^2 + bx = 0$ řešíme vytknutím neznámé na levé straně rovnice a uvážením, že součin dvou čísel je roven nule právě tehdy, je-li roven nule alespoň jeden činitel.

Průvodce

Na dvou příkladech vyložím princip metody. Mám řešit rovnice $x^2 + x = 0$ a $2x^2 - 8x = 0$. Provedu vytknutí:

$$x(x+1) = 0 \quad \text{a} \quad x(2x-4) = 0$$

Porovnám s nulou jednotlivé činitele.

První rovnice: $x_1 = 0, x_2 = -1$

Druhá rovnice: $x_1 = 0, x_2 = 2$

U kvadratické rovnice bez absolutního členu je jeden z kořenů vždy roven nule.

Příklad

Řešte v R rovnice:

a) $2x^2 + 9x = 0$

b) $-3x^2 + \sqrt{5}x = 0$

c) $6x^2 = -8x$

Řešení.

Dle průvodce výše provedu vytknutí neznámé x:

a)
$$\begin{aligned} x(2x+9) &= 0 \\ x = 0 \quad & 2x+9=0 \\ x_1 = 0 \quad & x_2 = -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

Výsledek: $K = \left\{0; -\frac{9}{2}\right\}$.

b)
$$\begin{aligned} x(-3x+\sqrt{5}) &= 0 \\ x = 0 \quad & -3x+\sqrt{5}=0 \\ x_1 = 0 \quad & x_2 = \frac{\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

Výsledek: $K = \left\{0; \frac{\sqrt{5}}{3}\right\}$.

c)
$$\begin{aligned} x(6x+8) &= 0 \\ x = 0 \quad & 6x+8=0 \\ x_1 = 0 \quad & x_2 = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Výsledek: $K = \left\{0; -\frac{4}{3}\right\}$.

Řešení úplné kvadratické rovnice typu $ax^2 + bx + c = 0$.

O řešitelnosti libovolné kvadratické rovnice rozhoduje výraz *Diskriminant*

$$D = b^2 - 4ac\,,$$

zvaný **diskriminant**.

<u>**Průvodce**</u>

Pro existenci řešení a výpočty hodnot kořenů platí následující pravidla a vzorce. Velmi důležitou roli hraje právě diskriminant D, který vypočítáme z koeficientů kvadratické rovnice.

1/ Je-li $D > 0$, má kvadratická rovnice dva reálné kořeny

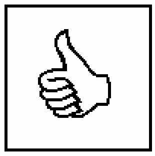
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

2/ Je-li $D = 0$, má kvadratická rovnice jeden (dvojnásobný) kořen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}\,.$$

3/ Je-li $D < 0$, nemá kvadratická rovnice v oboru reálných čísel žádný kořen. Tento případ řešený v jiných číselných oborech si nechme na další ročníky vašeho studia.

Podstatné je, že kořeny kvadratické rovnice lze vypočítat užitím vzorců, kde stěžejní roli hrají koeficienty kvadratické rovnice. Ty je třeba určit bezchybně.

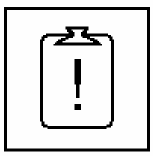


Příklad

Řešte v R rovnice:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $x^2 + 3x + 7 = 0$



Řešení.

Nejprve stanovíme koeficienty této rovnice a diskriminant:

a) $a = 1, b = -5, c = 6 \Rightarrow D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 > 0$

Rovnice má tedy dva reálné kořeny, které vypočítáme užitím výše uvedených vzorců:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{5+1}{2} = 3,\ x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

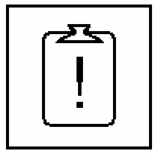
Výsledek: $K = \{3;2\}$.

b) $a = 1, b = 3, c = 7 \Rightarrow D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 9 - 28 = -19 < 0$

Rovnice nemá v oboru reálných čísel řešení.

Výsledek: $K = \emptyset$.

Příklad



Řešte v R rovnice:

a) $3x^2 - 8x + 4 = 0$

b) $x^2 + 7x + 10 = 0$

c) $x^2 - 10x + 28 = 0$

d) $x^2 + x - 1 = 0$

e) $x^2 + x + 1 = 0$

f) $2x^2 - 8x + 8 = 0$

Řešení.

a) $D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 16, \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \dfrac{8 \pm 4}{6} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = \dfrac{2}{3}$

Výsledek: $K = \left\{2; \dfrac{2}{3}\right\}$.

b) $D = 9, \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-7 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -5, x_2 = -2$

Výsledek: $K = \{-5;-2\}$.

c) $D = -12 < 0 \Rightarrow$ rovnice nemá reálné kořeny

Výsledek: $K = \emptyset$

d) $D = 5, \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

Výsledek: $K = \left\{\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$.

e) $D = -3 < 0 \Rightarrow$ rovnice nemá reálné kořeny

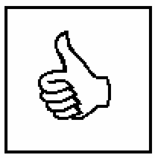
Výsledek: $K = \emptyset$.

f) $D = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 2} = \dfrac{8 \pm 0}{4} \Rightarrow x_{1,2} = 2$ rovnice má dvojnásobný kořen

Výsledek: $K = \{2\}$.

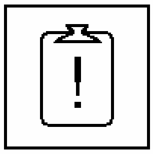
Průvodce

Nyní vám ukážu rovnice vedoucí k řešení kvadratické rovnice. První úkol je upravit rovnici na tvar, ze kterého budeme schopni určit koeficienty kvadratické rovnice a pomocí nich vypočítat diskriminant.



Příklad

Řešte v R rovnice:



a) $x+\frac{1}{x+1}=1+\frac{x}{x+1}$

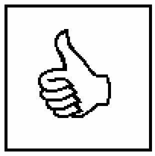
b) $3+x=1+\frac{4}{2-x}$

c) $\frac{2}{1-x}-\frac{7}{x+1}=\frac{3}{x}$

Řešení.

a) rovnici vynásobím výrazem $x+1$ za předpokladu, že $x\neq -1$:

$$\begin{aligned} x+\frac{1}{x+1} &= 1+\frac{x}{x+1} && \Big|\cdot(x+1) \\ x(x+1)+1 &= x+1+x && x\neq -1 \\ x^2+x+1 &= 2x+1 \\ x^2-x &= 0 \end{aligned}$$



Průvodce

Za této situace mám dvě možnosti, jak dále postupovat. Obě vám je nastíním.

1/ Provedu rozklad výrazu na levé straně rovnice:

$$x(x-1)=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=1$$

2/ Pomocí diskriminantu a vzorečku:

$$D=1 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm 1}{2} \Rightarrow x_1=0, x_2=1$$

Výsledek: $K=\{0;1\}$.

b) rovnici vynásobím výrazem $2-x$ za předpokladu, že $x\neq 2$:

$$\begin{aligned} 3+x &= 1+\frac{4}{2-x} && \Big|\cdot(2-x) \\ (3+x)(2-x) &= 2-x+4 && x\neq 2 \\ -x^2-x+6 &= 2-x+4 \\ -x^2 &= 0 && \Rightarrow x^2=0 \end{aligned}$$

Výsledek: $K=\{0\}$.

c) rovnici vynásobím výrazy $1-x, x+1; x$ za předpokladu, že $x\neq -1;1;0$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{1-x}-\frac{7}{x+1} &= \frac{3}{x} && \Big|\cdot(x+1)(1-x)x \\ 2x(x+1)-7x(1-x) &= 3(x+1)(1-x) && x\neq \pm 1;0 \\ 2x^2+2x-7x+7x^2 &= 3-3x^2 \\ 12x^2-5x-3 &= 0 \end{aligned}$$

$$D=169 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm 13}{24} \Rightarrow x_1=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}, x_2=-\frac{8}{24}=-\frac{1}{3}$$

Výsledek: $K=\left\{\frac{3}{4};-\frac{1}{3}\right\}$.

Úloha 1.5

Řešte v R rovnice:

a) $x^2 + 15x = 216$

b) $\dfrac{4x+5}{x} - \dfrac{12}{x-2} = 1$

Návod a řešení naleznete v kapitole 1.7

Úloha 1.6

Obsah čtverce je 49 m^2. Jaká je délka jeho strany?

Návod a řešení naleznete v kapitole 1.7

Úloha 1.7

Povrch krychle 192 cm^2. Jaká je velikost její hrany?

Návod a řešení naleznete v kapitole 1.7

Úloha 1.8

Zkraťte:

a) $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 15}$

b) $\dfrac{2x^2 + 8x - 90}{3x^2 - 36x + 105}$

Návod a řešení naleznete v kapitole 1.7

1.4 Rovnice s absolutními hodnotami

Průvodce

S pojmem absolutní hodnota jste se setkali v minulé opoře, kapitole 1.2.
Absolutní hodnotu reálného čísla a, značí se $|a|$, definujeme takto:

$$|a| = \begin{cases} a & pro\ a \geq 0 \\ -a & pro\ a < 0, \end{cases}$$

tj. absolutní hodnota nezáporného čísla je číslo samo, absolutní hodnota záporného čísla je číslo k němu opačné.

My se budeme zabývat metodami řešení rovnic s neznámou v absolutní hodnotě.

Příklad takové rovnice: $|x-2| + 3 = x - |2x+3|$.

Průvodce

Pro nás je nyní důležité, jak budeme pracovat s výrazy s proměnnou v absolutní hodnotě.

Podle výše uvedené definice absolutní hodnoty víme, že například výraz $|x-2|$ píšeme pro $x \geq 2$ jako $x-2$ (absolutní hodnota kladného výrazu je výraz tentýž), pro $x < 2$ jako $-(x-2) = -x + 2$ (absolutní hodnota záporného výrazu je výraz k němu opačný).

Nejprve si ukážeme řešení jednoduché lineární rovnice s absolutní hodnotou.

Příklad
Jsou to rovnice následujícího typu, řešme je v R:

a) $|x| = 8, \quad \sqrt{2} = |-x|, \quad |5x| = 15$

b) $|x| = 0, \quad |x| = -7, \quad |2x| = 3$

Řešení:

a) $K = \{\pm 8\}, \quad K = \{\pm\sqrt{2}\}, \quad K = \{\pm 3\}$.

b) $K = \{0\}, \quad K = \emptyset, \quad K = \left\{\pm\dfrac{3}{2}\right\}$.

Průvodce
Intuitivně tušíte, že $|8| = 8$, stejně jako $|-8| = 8$. Naproti tomu rovnice $|x| = -7$ nemá žádné řešení, protože $|x| \geq 0$ pro libovolné reálné číslo x.

Průvodce
Dále vám ukážu řešení o stupeň těžší rovnice. Výraz v absolutní hodnotě bude dvojčlen. Mým cílem v této opoře není ukazovat všechny metody řešení daného problému. Proto v jiné literatuře najdete i jiné způsoby řešení následující rovnice. Výhoda následujícího postupu spočívá v tom, že jej používáme při řešení i složitějších rovnic s absolutní hodnotou.

Příklad
Řešme v R následující rovnice:

a) $|x - 3| = 2$

b) $|x + 6| = 3$

c) $|5 - 2x| = 4$

d) $|2 - x| = -5$

Řešení.
a) Abych mohl použít definici absolutní hodnoty, musím vědět, je-li výraz $x - 3$ nezáporný, nebo záporný. Proto množinu R rozdělím nulovým bodem tohoto výrazu, $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$, na dva disjunktní intervaly $I_1 = (-\infty; 3)$ a $I_2 = \langle 3; \infty)$.
V každém z těchto intervalů vyřeším rovnici zvlášť:

1/ $x \in (-\infty; 3) \Rightarrow x - 3 < 0 \Rightarrow |x - 3| = -(x - 3) = 3 - x$. Potom řeším rovnici

$$\begin{aligned} 3 - x &= 2 \\ -x &= -1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$-1 \to 1 \in (-\infty; 3)$ a proto jsem dostal jediné řešení $x = 1$

2/ $x \in \langle 3; \infty) \Rightarrow x - 3 > 0 \Rightarrow |x - 3| = x - 3$. Potom řeším rovnici

$$\begin{aligned} x - 3 &= 2 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

$\to 5 \in \langle 3; \infty)$ a proto jsem dostal jediné řešení $x = 5$

Výsledek: $K = \{1; 5\}$.

Průvodce
Podstatou řešení je „zbavení se“ absolutní hodnoty, tj. rozepsání v příslušných intervalech jako výraz tentýž nebo opačný.

b) Nulový bod výrazu $x+6$ je $x=-6$, proto příslušné intervaly jsou $I_1=(-\infty;-6)$ a $I_2=\langle -6;\infty)$.

1/ $x\in(-\infty;-6)\Rightarrow x+6<0\Rightarrow |x+6|=-(x+6)=-x-6$. Potom řeším rovnici:

$$\begin{aligned}-x-6&=3\\ -x&=9\\ x&=-9\end{aligned}$$

$\rightarrow -9\in(-\infty;-6)$ a proto jsem dostal jediné řešení $x=-9$

2/ $x\in\langle -6;\infty)\Rightarrow x+6>0\Rightarrow |x+6|=x+6$. Potom řeším rovnici:

$$\begin{aligned}x+6&=3\\ x&=-3\end{aligned}$$

$\rightarrow -3\in\langle -6;\infty)$ a proto jsem dostal jediné řešení $x=-3$

Výsledek: $K=\{-9;-3\}$.

c) Nulový bod výrazu $5-2x$ je $x=\frac{5}{2}$ proto příslušné intervaly jsou $I_1=\left(-\infty;\frac{5}{2}\right\rangle$ a $I_2=\left(\frac{5}{2};\infty\right)$.

1/ $x\in\left(-\infty;\frac{5}{2}\right\rangle\Rightarrow 5-2x>0\Rightarrow |5-2x|=5-2x$. Potom řeším rovnici:

$$\begin{aligned}5-2x&=4\\ -2x&=-1\\ x&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\rightarrow \frac{1}{2}\in\left(-\infty;\frac{5}{2}\right\rangle$ a proto jsem dostal jediné řešení $x=\frac{1}{2}$

2/ $x\in\left(\frac{5}{2};\infty\right)\Rightarrow 5-2x<0\Rightarrow |5-2x|=-(5-2x)=2x-5$. Potom řeším rovnici:

$$\begin{aligned}2x-5&=4\\ 2x&=9\\ x&=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

$\rightarrow \frac{9}{2}\in\left(\frac{5}{2};\infty\right)$ a proto jsem dostal jediné řešení $x=\frac{9}{2}$

Výsledek: $K=\left\{\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right\}$.

d) Vzhledem k tomu, že $|2-x|\geq 0$ pro každé reálné číslo, rovnice $|2-x|=-5$ nemá žádné řešení.
Výsledek: $K=\emptyset$.

Příklad
Řešme v R rovnice:

a) $|x|-|x-1|=2$

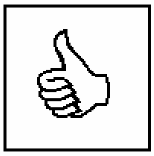
b) $|x-1|-|x-2|=1$

c) $|x-2|+|x+2|=2x+2$

Řešení.

Průvodce

Postup se nemění. Při větším počtu absolutních hodnot je více nulových bodů a více intervalů, ve kterých je třeba zkoumat znaménka jednotlivých výrazů v absolutních hodnotách.



a) Nulové body jsou dva, $x = 0;1$. Intervaly jsou tři $I_1 = (-\infty;0)$, $I_2 = \langle 0;1)$ a $I_3 = \langle 1;\infty)$. Znaménka jednotlivých výrazů v příslušných intervalech vám zapíši do tabulky. Určíte je pomocí dosazení libovolného reálného čísla z příslušného intervalu. Tabulku není nutné vždy dělat.

x	$I_1 = (-\infty;0)$	$I_2 = \langle 0;1)$	$I_3 = \langle 1;\infty)$
x	-	+	+
$x-1$	-	-	+

Řeším rovnice v jednotlivých případech:

1/ $I_1 = (-\infty;0)$

$$\begin{aligned} -x-[-(x-1)] &= 2 \\ -x+x-1 &= 2 \Rightarrow K_1 = \emptyset \\ 0\cdot x &= 3 \end{aligned}$$

2/ $I_2 = \langle 0;1)$

$$\begin{aligned} x-[-(x-1)] &= 2 \\ 2x-1 &= 2 \rightarrow \frac{3}{2} \notin I_2 \Rightarrow K_2 = \emptyset \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

3/ $I_3 = \langle 1;\infty)$

$$\begin{aligned} x-(x-1) &= 2 \\ x-x+1 &= 2 \Rightarrow K_3 = \emptyset \\ 0\cdot x &= -1 \end{aligned}$$

Výsledek: $K = \emptyset$.

b) Nulové body jsou dva, $x = 1;2$. Intervaly jsou tři $I_1 = (-\infty;1)$, $I_2 = \langle 1;2)$ a $I_3 = \langle 2;\infty)$. Znaménka jednotlivých výrazů v příslušných intervalech vám pro přehlednost opět zapíši do tabulky.

x	$I_1 = (-\infty;1)$	$I_2 = \langle 1;2)$	$I_3 = \langle 2;\infty)$
$x-1$	-	+	+
$x-2$	-	-	+

Řeším rovnice v jednotlivých případech:

1/ $I_1 = (-\infty;1)$

$$\begin{aligned} -(x-1)-[-(x-2)] &= 1 \\ -x+x+1-2 &= 1 \Rightarrow K_1=\emptyset \\ 0\cdot x &= 2 \end{aligned}$$

2/ $I_2=\langle 1;2)$

$$\begin{aligned} x-1-[-(x-2)] &= 1 \\ 2x-3 &= 1 \rightarrow 2\notin I_2 \Rightarrow K_2=\emptyset \\ x &= 2 \end{aligned}$$

3/ $I_3=\langle 2;\infty)$

$$\begin{aligned} x-1-(x-2) &= 1 \\ x-1-x+2 &= 1 \rightarrow \text{ libovolné reálné číslo z } I_3=\langle 2;\infty) \text{ splňuje tuto} \\ 0\cdot x &= 0 \end{aligned}$$

rovnost $\Rightarrow K_3=I_3$

Výsledek: $K=\langle 2;\infty)$.

c) Nulové body jsou dva, $x=-2;2$. Intervaly jsou tři $I_1=(-\infty;-2)$, $I_2=\langle -2;2)$ a $I_3=\langle 2;\infty)$.

x	$I_1=(-\infty;-2)$	$I_2=\langle -2;2)$	$I_3=\langle 2;\infty)$
$x-2$	-	-	+
$x+2$	-	+	+

1/ $I_1=(-\infty;-2)$

$$\begin{aligned} -(x-2)-(x+2) &= 2x+2 \\ -2x &= 2x+2 \rightarrow -\frac{1}{2}\notin I_1 \Rightarrow K_1=\emptyset \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

2/ $I_2=\langle -2;2)$

$$\begin{aligned} -(x-2)+x+2 &= 2x+2 \\ 4 &= 2x+2 \rightarrow 1\in I_2 \Rightarrow K_2=\{1\} \\ 1 &= x \end{aligned}$$

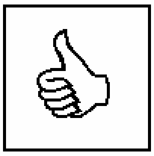
3/ $I_3=\langle 2;\infty)$

$$\begin{aligned} x-2+x+2 &= 2x+2 \\ 2x &= 2x+2 \Rightarrow K_3=\emptyset \\ 0\cdot x &= 2 \end{aligned}$$

Výsledek: $K=\{1\}$.

Průvodce

Jen náznakem se podíváme na řešení kvadratických rovnic s absolutní hodnotou. Princip je opět stejný, tj. odstranit absolutní hodnotu. V závislosti na znaménku výrazu v příslušném intervalu je to buď výraz tentýž nebo opačný.



Příklad

Řešme v R rovnice:

a) $x^2 + 3|x| + 2 = 0$

b) $\left|x^2 + 3x\right| - 4 = 0$

Řešení.

a) Nulový bod je $x = 0$, intervaly jsou $I_1 = (-\infty;0)$ a $I_2 = \langle 0;\infty)$.

1/ V $I_1 = (-\infty;0)$ rovnice má tvar $x^2 - 3x + 2 = 0$. Lze řešit přes diskriminant $(D = 9 - 8 = 1, x_1 = 2, x_2 = 1)$ nebo rozkladem $(x-2)(x-1) = 0$ (podrobněji v následující kapitole), odkud jsou vidět kořeny $x_1 = 2, x_2 = 1$. Ani jeden z nich však nepatří do $I_1 = (-\infty;0)$, proto $\Rightarrow K_1 = \emptyset$.

2/ V $I_2 = \langle 0;\infty)$ rovnice má tvar $x^2 + 3x + 2 = 0$. Lze řešit přes diskriminant $(D = 9 - 8 = 1, x_1 = -2, x_2 = -1)$ nebo rozkladem $(x+2)(x+1) = 0$ odkud je vidět kořeny $x_1 = -2, x_2 = -1$. Ani zde však žádný z kořenů nepatří do $I_2 = \langle 0;\infty)$, proto $\Rightarrow K_2 = \emptyset$.

Výsledek: $K = \emptyset$.

b) Nulové body jsou dva, $x = 0;-3$. Intervaly jsou tři $I_1 = (-\infty;-3)$, $I_2 = \langle -3;0)$ a $I_3 = \langle 0;\infty)$.

x	$I_1 = (-\infty;-3)$	$I_2 = \langle -3;0)$	$I_3 = \langle 0;\infty)$
$x^2 + 3x$	+	-	+

1/ V $I_1 = (-\infty;-3)$ nebo $I_3 = \langle 0;\infty)$ má rovnice tvar $x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow$

rozkladem zjistíme kořeny $(x+4)(x-1) = 0$, odkud $x_1 = -4, x_2 = 1$; nebo diskriminant $D = 25$, odkud $x_1 = -4, x_2 = 1$. Oba kořeny patří do $I_1 = (-\infty;-3)$ nebo $I_3 = \langle 0;\infty)$, tedy $K_1 = \{-4;1\}$

2/ Zbývá ještě prověřit $I_2 = \langle -3;0)$, rovnice má tvar $-x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow$

diskriminant $D = -7 < 0$, proto $K_2 = \emptyset$

Výsledek: $K = \{-4;1\}$.

Úloha 1.9

Řešte v R:

a) $|x - 7| = x - 7$

b) $|2x - 3| = x$

c) $|x + 2| = 4|x - 3|$

Návod a řešení naleznete v kapitole 1.7

Úloha 1.10

Řešte v R rovnici $\left|x^2 + 4x\right| - 3x - 6 = 0$.

Návod a řešení naleznete v kapitole 1.7

1.5 Rovnice v součinovém a podílovém tvaru

Průvodce
Dalším typem rovnic jsou rovnice v součinovém a podílovém tvaru. Ukážu vám jednoduchý způsob jejich řešení. Hlavní myšlenkou je ta skutečnost, že součin několika čísel se rovná nule právě tehdy, když alespoň jeden z činitelů se rovná nule.

Příklad
Řešme v R rovnici $x(x-1)(x+2)=0$.

Řešení
Danou rovnici nebudu řešit roznásobením závorek na levé straně. Všimnu si, že levá strana je součinem tří činitelů a tento součin má být roven nule. Což nastane právě tehdy, když alespoň jeden z nich bude roven nule.

$$x=0 \Rightarrow x_1=0; \quad x-1=0 \Rightarrow x_2=1, \quad x+2=0 \Rightarrow x_3=-2$$

Výsledek: $K=\{-2;0;1\}$.

Některé rovnice však musíme převést na součinový tvar a teprve pak je tímto způsobem řešit.

Příklad
Řešme v R rovnice:

a) $2x^2-4x=6x$

b) $x^2+x(x+1)=0$

c) $x^3+2x^2-x-2=0$

Řešení.
Všechny rovnice se budu snažit úpravou převést na součinový tvar, nejčastěji používanou úpravou bude vytýkání:

a)

$$\begin{aligned} 2x^2-4x &= 6x \\ 2x^2-10x &= 0 \rightarrow x_1=0, x_2=5 \\ 2x(x-5) &= 0 \end{aligned}$$

Výsledek: $K=\{0;5\}$.

b)

$$\begin{aligned} x^2+x^2+x &= 0 \\ 2x^2+x &= 0 \rightarrow x_1=0, x_2=-\frac{1}{2} \\ x(2x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Výsledek: $K=\left\{0;-\frac{1}{2}\right\}$.

c)

$$\begin{aligned} x^3+2x^2-x-2 &= 0 \\ x^2(x+2)-(x+2) &= 0 \rightarrow x_1=-2, x^2=1 \rightarrow x_2=1, x_3=-1 \\ (x+2)\left(x^2-1\right) &= 0 \end{aligned}$$

Výsledek: $K=\{-2;1;-1\}$.

Úloha 1.11
Řešte v R:

a) $4x^3-x=0$

b) $\left(2-t^2\right)\left(t^3-t\right)=0$

Návod a řešení naleznete v kapitole 1.7

Průvodce

Podobná situace nastane i v případě, kdy rovnice je v podílovém tvaru, tj. rovnice má tvar zlomku, v jehož čitateli i jmenovateli jsou výrazy s proměnnou.

Příklad

Řešme v R rovnice:

a) $\dfrac{x+2}{x-2}=0$

b) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=0$

Řešení.

Zlomek je roven nule pouze v případě, kdy jeho čitatel je roven nule!

a) $x \neq 2$

$$\frac{x+2}{x-2}=0 \Leftrightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

Výsledek: $K=\{-2\}$.

b) $x \neq \pm 1$

$$\frac{x^2+1}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow x^2+1=0 \Rightarrow x \in \emptyset$$

Výsledek: $K=\emptyset$.

V některých případech je možné rovnici převézt na tento tvar rovnic, tj. s nulou na jedné straně.

Příklad

Řešme v R rovnice:

a) $\dfrac{x-3}{x-4}=1$

b) $\dfrac{4}{x-4}+1=\dfrac{2x-4}{x-4}$

c) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{3(x-2)}=1$

Řešení.

Hlavní myšlenka je, že vše převedu na jednu stranu rovnice a výrazy uvedu na společného jmenovatele:

a) $x \neq 4$

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{x-4}-1 &= 0 \\ \frac{x-3-(x-4)}{x-4} &= 0 \Rightarrow 1 \neq 0 \Rightarrow x \in \emptyset \\ \frac{1}{x-4} &= 0 \end{aligned}$$

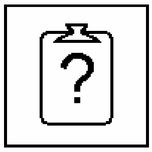
b) $x \neq 4$

$$\begin{aligned} \frac{4}{x-4}+1-\frac{2x-4}{x-4} &= 0 \\ \frac{4+x-4-(2x-4)}{x-4} &= 0 \quad \Rightarrow x \in \emptyset \\ \frac{-x+4}{x-4} &= 0 \\ -1 &= 0 \end{aligned}$$

c) $x \neq 2$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x-2}-\frac{2}{3(x-2)}-1 &= 0\\
\frac{3-2-3(x-2)}{3(x-2)} &= 0 \Rightarrow 7-3x=0 \Rightarrow x=\frac{7}{3}\\
\frac{7-3x}{3(x-2)} &= 0
\end{aligned}
$$

Výsledek: Řešení má pouze c) $K=\left\{\frac{7}{3}\right\}$.

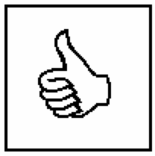


Úloha 1.12

Řešte v R rovnic $\frac{x-3}{x-4}=\frac{1}{2}$.

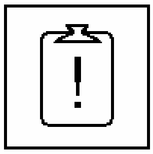
Návod a řešení naleznete v kapitole 1.7

1.6 Iracionální rovnice



Průvodce

Iracionální rovnice jsou rovnice, které obsahují odmocniny z neznámé nebo z výrazů s neznámou. Zpravidla je řešíme v oboru reálných čísel a stěžejním krokem je **umocnění** rovnice. K této úpravě lze přistupovat dvojím způsobem, ale my ji budeme brát jako důsledkovou úpravu. **Součástí řešení je zkouška.** Nezapomínejte na to!



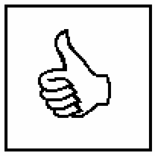
Příklad

Řešme v R rovnice:

a) $x-\sqrt{x+1}=5$

b) $6x-13\sqrt{x}+6=0$

Řešení.



Průvodce

Důsledkovou operaci umocnění provádějte až za situace, kdy umocněním se odmocnina odstraní. Tedy je třeba výhodné nechat odmocninu samostatně na jedné straně rovnice.

a)
$$
\begin{aligned}
x-5 &= \sqrt{x+1} && \Big|^{2}\\
(x-5)^2 &= x+1 && x\ge -1\\
x^2-10x+25 &= x+1\\
x^2-11x+24 &= 0 && x=3;8
\end{aligned}
$$

Zkouška: $L(3)\neq P(3), L(8)=P(8)$

Výsledek: $K=\{8\}$.

b)
$$
\begin{aligned}
6x+6 &= 13\sqrt{x} && \Big|^{2}\\
36(x+1)^2 &= 169x && x\ge 0\\
36x^2+72x+36 &= 169x\\
36x^2-97x+36 &= 0
\end{aligned}
$$

$D=4225;\ x_1=\frac{9}{4}\quad x_2=\frac{4}{9}$

Zkouška: $L\left(\frac{9}{4}\right)=P\left(\frac{9}{4}\right), L\left(\frac{4}{9}\right)=P\left(\frac{4}{9}\right)$

Výsledek: $K=\left\{\frac{4}{9};\frac{9}{4}\right\}$.

Příklad
Řešme v R rovnice:

a) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=3$

b) $2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=2$

Řešení.

Průvodce
V případě rovnice s více odmocninami z výrazů s proměnnou je postup obdobný jako v předcházejících případech. Jen budeme umocňovat dvakrát, resp. vícekrát. Je výhodné se při prvním umocnění „zbavit“ jedné odmocniny a před druhým umocněním rovnici upravit a zjednodušit, abychom se při umocnění zbavili další odmocniny.

a)

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{x+2} & = & 3-\sqrt{3-x} & \Big|\,^2 \\ x+2 & = & 9-6\sqrt{3-x}+3-x & \\ 2x-10 & = & -6\sqrt{3-x} & \Big|:2 \\ x-5 & = & -3\sqrt{3-x} & \Big|\,^2 \\ 0 & = & x^2-x-2 & \end{array}$$

$x=2;-1$

Zkouška: $L(2)=P(2), L(-1)=P(-1)$

Výsledek: $K=\{2;-1\}$.

b)

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{x+3} & = & 2-2\sqrt{x-1} & \Big|\,^2 \\ x+3 & = & 4-8\sqrt{x-1}+4x-4 & \\ 8\sqrt{x-1} & = & 3x-3 & \Big|\,^2 \\ 64x-64 & = & 9x^2-18x+9 & \\ 0 & = & 9x^2-82x+73 & \end{array}$$

$D=4096,\ x_1=\dfrac{73}{9}\quad x_2=1$

Zkouška: $L\left(\dfrac{73}{9}\right)\neq P\left(\dfrac{73}{9}\right), L(1)=P(1)$

Výsledek: $K=\{1\}$.

Úloha 1.13
Řešte v R rovnice:

a) $\sqrt{3x+7}=16$

b) $\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=1$

Návod a řešení naleznete v kapitole 1.7

1.7 Shrnutí kapitoly a řešení úloh

V této kapitole jsem vám předložil základní metody řešení lineárních a kvadratických rovnic a několik dalších typů rovnic, jejichž řešení vede k lineárním nebo kvadratickým rovnicím.
Naučili jste se používat ekvivalentní úpravy při řešení rovnic:

1. Vzájemná výměna obou stran rovnice.
2. Nahrazení některé strany rovnice výrazem, který je jí roven v celém definičním oboru řešení rovnice.
3. Přičtení téhož čísla nebo výrazu majícího smysl v celém oboru řešení rovnice k jejím oběma stranám.
4. Násobení/dělení obou stran rovnice stejným číslem různým od nuly.

Poznali jste vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Naučili jste se používat i jednu důsledkovou operaci – umocňování. Při jejím použití je nezbytné provedení zkoušky.

> **<u>Průvodce</u>**
> Jako trénink doporučuji propočítat následující sérii korespondenčních úloh.

Korespondenční úlohy ke kapitole 1.2
Literatura [2], kapitola II. Algebraické rovnice a jejich soustavy, strana 67 – 71,
cvičení 1.1 – 3 úlohy
cvičení 1.3 – 3 úlohy
cvičení 1.4 – 2 úlohy
cvičení 1.5 – 2 úlohy
cvičení 1.6 – 1 úloha.

Korespondenční úlohy ke kapitole 1.3
Literatura [2], kapitola II. Algebraické rovnice a jejich soustavy, strana 72 – 75,
cvičení 2.1 – 2 úlohy
cvičení 2.2 – 2 úlohy
cvičení 2.3 – 3 úlohy
cvičení 2.4 – 2 úlohy.

Korespondenční úlohy ke kapitole 1.4
Literatura [2], kapitola II. Algebraické rovnice a jejich soustavy, strana 80 – 82,
cvičení 3.1.1 – 3 úlohy
cvičení 3.1.2 – 3 úlohy
cvičení 3.1.4 – 3 úlohy
cvičení 3.1.6 – 2 úlohy
cvičení 3.1.7 – 2 úlohy.

Korespondenční úlohy ke kapitole 1.6
Literatura [2], kapitola II. Algebraické rovnice a jejich soustavy, strana 82 – 83,
cvičení 3.2.1 – 2 úlohy
cvičení 3.2.2 – 2 úlohy.

Řešení úloh

Řešení úlohy 1.1

a) Nejprve odstraňte závorky, v pořadí kulatou a poté hranatou:

$$\begin{aligned} x - 4[x - 2(x+6)] &= 5x + 3 \\ x + 4x + 48 &= 5x + 3 \\ 0 \cdot x &= -45 \end{aligned}$$

Výsledek: $K = \emptyset$.

b) Rovnici vynásobíte společným jmenovatelem čísel 3, 4 a 12, což je 12:

$$\begin{aligned}
\frac{6+25x}{12}-(x-1) &= \frac{2x}{3}+\frac{7}{4} \\
6+25x-12(x-1) &= 4\cdot 2x+3\cdot 7 \\
13x+18 &= 8x+21 \\
5x &= 3 \\
x &= \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

Výsledek: $K=\left\{\frac{3}{5}\right\}$.

c) Rovnici vynásobíte 8:

$$\begin{aligned}
2(x+3)-3\left(\frac{1}{4}x+2\right) &= \frac{x+11}{8} \\
16(x+3)-3\cdot 8\left(\frac{1}{4}x+2\right) &= x+11 \\
16x+48-6x-48 &= x+11 \\
9x &= 11 \\
x &= \frac{11}{9}
\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že náš kořen $x>1$ a tedy není z oboru řešení rovnice, rovnice nemá řešení.
Výsledek: $K=\emptyset$.

d) Společný jmenovatel lomených výrazů je $2\cdot 5\cdot 9(2x-3)=90(2x-3)$, kterým danou rovnici vynásobíme. Nezapomeňte na podmínku $x\neq\frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{5}{2x-3}-\frac{3x-8}{2(2x-3)} &= \frac{7}{9}-\frac{6x-1}{5(2x-3)} && \Big|\cdot 90(2x-3) \\
450-45(3x-8) &= 10(2x-3)\cdot 7-18(6x-1) && x\neq\frac{3}{2} \\
450-135x+360 &= 140x-210-108x+18 \\
810-135x &= 32x-192 \\
1002 &= 167x && \Big| :167 \\
6 &= x
\end{aligned}$$

Výsledek: $K=\{6\}$ v souladu s podmínkou.

e) Nejprve rozšiřte oba složené zlomky číslem tři. Zbavíte se tak složených zlomků. Poté za splnění podmínek rovnici vynásobte tak, aby jste se zbavili všech zlomků:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+x}-\frac{2}{3} &= \frac{2}{3}-\frac{\left(\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}\right)\cdot 6}{\left(\frac{2}{3}+x\right)\cdot 6} \\
\frac{2}{2+3x}-\frac{2}{3} &= \frac{2}{3}-\frac{9x-4}{(2+3x)2} && \Big|\cdot 6(2+3x) \\
12-4(2+3x) &= 4(2+3x)-3(9x-4) && x\neq -\frac{2}{3} \\
12-8-12x &= 8+12x-27x+12 \\
3x &= 16 && \Big|:3 \\
x &= \frac{16}{3}
\end{aligned}$$

Výsledek: $K=\left\{\frac{16}{3}\right\}$.

f) Přepíši si dělení jako zlomek a za příslušných podmínek odstraním zlomky:

$$\begin{aligned}
(3+x):(3-x) &= 5:3 \\
\frac{3+x}{3-x} &= \frac{5}{3} && \Big|\cdot 3(3-x) \\
9+3x &= 15-5x && x\neq 3 \\
x &= \frac{6}{8}=\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Výsledek: $K=\left\{\frac{3}{4}\right\}$.

Řešení úlohy 1.2

Jednu stranu trojúhelníku si označím x. Pak další strany dle zadaní píši ve tvaru $x-6,\ x+8$.

Jestliže si první stranu označím x a ta je o 6 cm delší než druhá strana, pak od první strany musím 6 cm odečíst, abych dostal velikost druhé strany.
Jestliže je první strana označena x a je o 8 cm kratší než třetí strana, musím k první straně 8 cm přičíst, abych získal velikost třetí strany.
Rovnice pro obvod:

$$\begin{aligned}
x+x-6+x+8 &= 104 \\
3x &= 102 \\
x &= 34
\end{aligned}$$

První strana má délku 34 cm. Délky zbývajících stran trojúhelníku jsou 28 cm a 42 cm.

Řešení úlohy 1.3

Fyzikální vysvětlení kalorimetrické rovnice (zákona zachování energie) vynechám. Zjednodušeně se dá říci, že součiny množství vody a jejích teplotních rozdílů (rozdíl původní teploty a výsledné teploty) jsou si rovny. Zkráceně zapsáno:

$$V_1\cdot\Delta t_1=V_2\cdot\Delta t_2\,.$$

Odtud

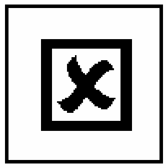
$$V_1 = \frac{V_2 \cdot \Delta t_2}{\Delta t_1}$$

Označím $V_1 = ?, \Delta t_1 = 48^0 C - 24^0 C = 24^0 C, V_2 = 1{,}2\ hl, \Delta t_2 = 24^0 C - 8^0 C = 16^0 C$.
Potom

$$V_1 = \frac{V_2 \cdot \Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{1{,}2 \cdot 16}{24} = 0{,}8 \text{ hl} = 80 \text{ l.}$$

Výsledek: Je zapotřebí 80 litrů vody teplé 48 ^{0}C.

Řešení úlohy 1.4

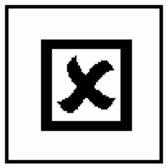


Označím společnou dobu jízdy t, jednotlivé dráhy s_1, s_2. V místě setkání platí, že $s_1 + s_2 = 285$. Jednotlivé dráhy automobilů vypočítáme dle známého vztahu $s = v \cdot t$:

$$\begin{aligned} 40{,}75 \cdot t + 30{,}5 \cdot t &= 285 \\ 71{,}25t &= 285 \\ t &= 4 \end{aligned}$$

$s_1 = 163$ km, $s_2 = 122$ km.
Výsledek: Auta se potkají za 4 hodiny jízdy a ujedou 163 km a 122 km.

Řešení úlohy 1.5



a) $x^2 + 15x = 216 \rightarrow x^2 + 15x - 216 = 0$

$$D = 1089 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-15 \pm 33}{2} \rightarrow x_1 = 9, x_2 = -24$$

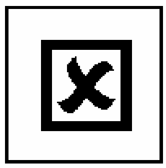
Výsledek: $K = \{9; -24\}$

b)
$$\begin{aligned} \frac{4x+5}{x} - \frac{12}{x-2} &= 1 && \Big|\cdot x(x-2) \\ (4x+5)(x-2) - 12x &= x(x-2) && x \neq 0;2 \\ 4x^2 - 3x - 10 - 12x &= x^2 - 2x \\ 4x^2 - 15x - 10 &= x^2 - 2x \\ 3x^2 - 13x - 10 &= 0 \end{aligned}$$

$$D = 289 \rightarrow x_{1,2} = \frac{13 \pm 17}{6} \rightarrow x_1 = 5, x_2 = \frac{2}{3}$$

Výsledek: $K = \left\{5; \frac{2}{3}\right\}$.

Řešení úlohy 1.6

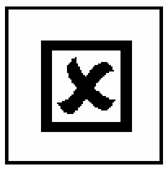


Pro obsah čtverce platí vztah $S = a^2$. Dosaďte a vyjádřete stranu a:

$$\begin{aligned} 49 &= a^2 \\ \pm 7 &= a \end{aligned}$$

Výsledek: Čtverec má velikost strany 7 m.

Řešení úlohy 1.7



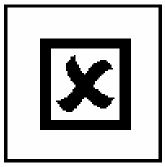
Povrch krychle se vypočítá podle vzorce $S = 6a^2$. Po dosazení:

$$\begin{aligned} 192 &= 6a^2 \\ 32 &= a^2 \\ \pm 4\sqrt{2} &= a \end{aligned}$$

Výsledek: Krychle má velikost hrany $4\sqrt{2}$ cm.

Řešení úlohy 1.8

Dané výrazy rozložíme na součin, lze využít i kořenů pomocné kvadratické rovnice :



a) $x^2 - 7x + 12 = 0 \to D = 1 \to x_1 = 4, x_2 = 3 \Rightarrow x^2 - 7x + 12 = (x-4)(x-3)$

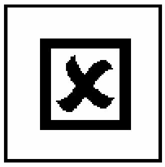
$x^2 - 8x + 15 = 0 \to D = 4 \to x_1 = 5, x_2 = 3 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = (x-5)(x-3)$

$$\frac{x^2-7x+12}{x^2-8x+15} = \frac{(x-4)(x-3)}{(x-5)(x-3)} = \frac{x-4}{x-5}, \quad x \neq 3;5$$

b) postup je obdobný:

$$\frac{2x^2+8x-90}{3x^2-36x+105} = \frac{2\left(x^2+4x-45\right)}{3\left(x^2-12x+35\right)} = \frac{2(x+9)(x-5)}{3(x-7)(x-5)} = \frac{2(x+9)}{3(x-7)}, \quad x \neq 7;5$$

Řešení úlohy 1.9



a) Nulový bod výrazu je $x = 7$, intervaly jsou $I_1 = (-\infty;7)$ a $I_2 = \langle 7;\infty)$.

1/ $x \in (-\infty;7)$. Potom řešíme rovnici:

$$\begin{aligned} -x+7 &= x-7 \\ -2x &= -14 \to 7 \notin (-\infty;7) \text{ proto } K_1 = \emptyset \\ x &= 7 \end{aligned}$$

2/ $x \in \langle 7;\infty)$. Potom řešíme rovnici:

$$\begin{aligned} x-7 &= x-7 \\ 0 \cdot x &= 0 \end{aligned}$$

, což je splněno pro všechna reálná $x \in \langle 7;\infty)$, $K_2 = I_2$

Výsledek: $K = \langle 7;\infty)$.

b) Nulový bod $x = \frac{3}{2}$, intervaly jsou $I_1 = \left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$ a $I_2 = \left\langle \frac{3}{2};+\infty\right)$.

1/ $I_1 = \left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$

$$\begin{aligned} -2x+3 &= x \\ -3x &= -3 \to 1 \in \left(-\infty;\frac{3}{2}\right) \\ x &= 1 \end{aligned}$$

2/ $I_2 = \left\langle \frac{3}{2};+\infty\right)$

$$\begin{aligned} 2x-3 &= x \\ 2x-x &= 3 \to 3 \in \left\langle \frac{3}{2};+\infty\right) \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Výsledek: $K = \{1;3\}$.

c) Nulové body jsou $x = -2;3$ Intervaly jsou tři $I_1 = (-\infty;-2)$, $I_2 = \langle -2;3)$ a $I_3 = \langle 3;\infty)$.

x	$I_1 = (-\infty;-2)$	$I_2 = \langle -2;3)$	$I_3 = \langle 3;\infty)$
$x+2$	-	+	+

$x-3$	-	-	+

1/ $I_1=(-\infty;-2)$

$-(x+2) = -4(x-3)$

$3x = 14$

$x = \frac{14}{3} \notin I_1$

2/ $I_2=\langle -2;3)$

$x+2 = -4(x-3)$

$5x = 10$

$x = 2 \in I_2$

3/ $I_3=\langle 3;\infty)$

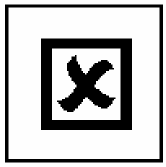
$x+2 = 4(x-3)$

$-3x = -14$

$x = \frac{14}{3} \in I_3$

Výsledek: $K=\left\{2;\frac{14}{3}\right\}$.

Řešení úlohy 1.10



Nulové body jsou dva, $x=0;-4$. Intervaly jsou tři $I_1=(-\infty;-4)$, $I_2=\langle -4;0)$ a $I_3=\langle 0;\infty)$.

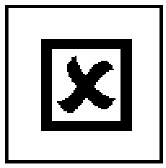
x	$I_1=(-\infty;-4)$	$I_2=\langle -4;0)$	$I_3=\langle 0;\infty)$
x^2+3x	+	-	+

1/ V $I_1=(-\infty;-4)$ nebo $I_3=\langle 0;\infty)$ má rovnice tvar $x^2+x-6=0 \rightarrow$ rozkladem zjistíme kořeny $(x+3)(x-2)=0$, odkud $x_1=-3, x_2=2$; nebo diskriminant $D=25$, odkud $x_1=-3, x_2=2$. Jen kořen $x_2=2$ $I_3=\langle 0;\infty)$, tedy $K_1=\{2\}$.

2/ Zbývá ještě prověřit $I_2=\langle -4;0)$, rovnice má tvar $-x^2-7x-6=0 \rightarrow$ $x^2+7x+6=0 \rightarrow$ rozkladem zjistíme kořeny $(x+6)(x+1)=0$, odkud $x_1=-6, x_2=-1$; nebo diskriminant $D=25$, $x_1=-6, x_2=-1$. Jen kořen $x=-1$ patří do $I_2=\langle -4;0)$, proto $K_2=\{-1\}$.

Výsledek: $K=\{-6;-1\}$.

Řešení úlohy 1.11



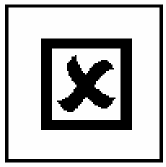
a) $4x^3-x=x\left(4x^2-1\right)=x(2x+1)(2x-1)$. Potom $x(2x+1)(2x-1)=0$

Výsledek: $K=\left\{\pm\frac{1}{2};0\right\}$.

b) $\left(2-t^2\right)\left(t^3-t\right)=\left(\sqrt{2}+t\right)\left(\sqrt{2}-t\right)t(t-1)(t+1)=0$

Výsledek: $K=\left\{\pm\sqrt{2};\pm1;0\right\}$.

Řešení úlohy 1.12



$$\frac{x-3}{x-4}-\frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{2(x-3)-(x-4)}{2(x-4)} = 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$\frac{x-2}{2(x-4)} = 0$$

Výsledek: $K=\{2\}$.

Řešení úlohy 1.13

a)

$$\begin{aligned} 3x+7 &= 256 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Zkouška: $L(8)=P(8)$

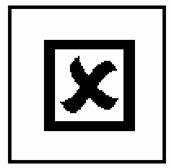
Výsledek: $K=\{8\}$.

b)

$$\begin{aligned} \sqrt{x+5} &= 1+\sqrt{x} && \Big|^{2} \\ x+5 &= 1+2\sqrt{x}+x \\ 2 &= \sqrt{x} && \Big|^{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow x=4,\quad L(4)=P(4)$

Výsledek: $K=\{4\}$.

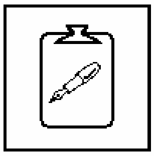


2. Nerovnice

V této kapitole se dozvíte: co je to nerovnice, jaké ekvivalentní úpravy lze s nerovnicemi provádět, jak řešit lineární nerovnice, jak řešit kvadratické nerovnice.

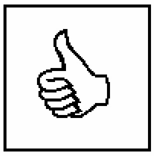
V této kapitole se naučíte: *řešit lineární nerovnice a kvadratické nerovnice, nerovnice s absolutními hodnotami.*

Klíčová slova kapitoly: lineární nerovnice; kvadratická nerovnice; ekvivalentní úpravy nerovnic.



Čas potřebný pro prostudování kapitoly:

6 + 12 hodin (teorie + řešení příkladů)



Průvodce

Názvy a označení užívané u nerovnic jsou obdobné jako u rovnic, tj. označení stran nerovnice, neznámých, oboru řešení nerovnice, kořenů (řešení), množiny všech kořenů (řešení) nerovnice. Znaky používané v nerovnicích jsou $<, >, \le, \ge$.

Než přejdu k ukázce řešení jednoduchých nerovnic, ještě zmíním ekvivalentní úpravy nerovnic, kde dochází k jedné zásadní změně.

Ekvivalent -ní úpravy

Hledání kořenů nerovnice je opět proces, při kterém místo dané nerovnice píšeme novou nerovnici, většinou takovou, která má stejné řešení, jako původní nerovnice. O takové nové nerovnici řekneme, že je s tou naší původní nerovnicí ekvivalentní. Úpravy, které budeme provádět s příslušnou nerovnicí se nazývají **ekvivalentní úpravy**. Jsou to takové úpravy nerovnice, při nichž žádný kořen neztratíme a také obráceně, žádný kořen nedostaneme navíc. Množiny kořenů původní nerovnice a nové nerovnice jsou si rovny.

Mezi **ekvivalentní úpravy** patří:

1. Vzájemná výměna obou stran nerovnice se **změnou znaku nerovnice**.
2. Nahrazení některé strany nerovnice výrazem, který je jí roven v celém oboru řešení nerovnice.
3. Přičtení téhož čísla nebo výrazu majícího smysl v celém oboru řešení nerovnice k jejím oběma stranám.
4. a) Násobení/dělení obou stran rovnice týmž kladným číslem nebo výrazem, který je definován a nabývá pouze kladných hodnot v celém oboru řešení nerovnice.
   b) Násobení/dělení obou stran rovnice týmž záporným číslem nebo výrazem, který je definován a nabývá pouze záporných hodnot v celém oboru řešení nerovnice **se současnou změnou znaku nerovnosti**.

Průvodce
Podstatnou a zásadní změnou při řešení nerovnic je násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem nebo výrazem, který nabývá záporných hodnot.

MUSÍTE POTÉ ZMĚNIT ZNAMÉNKO V OPAČNÉ!

$$\begin{array}{rcll} -2x & < & 10 & \mid :(-2) \\ x & > & -5 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} -\frac{3}{5} & < & \frac{-x}{5} & \mid \cdot(-5) \\ 3 & > & x & \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} -3x & \geq & 7 & \mid :(-3) \\ x & \leq & -\frac{7}{3} & \end{array}$$

Průvodce
Pokud při řešení nerovnice použijeme pouze ekvivalentní úpravy nerovnic, není zkouška nutnou součástí řešení. Zkoušku při řešení nerovnice lze pro kontrolu vždy provést a také ji doporučuji.

2.1 Lineární nerovnice

Lineární nerovnice

Lineární nerovnice s neznámou x je nerovnice, kterou lze vyjádřit ve tvaru

$$ax+b<0, \quad ax+b\leq 0, \quad ax+b>0, \quad ax+b\geq 0.$$

Jejich řešení lze v R zapsat například pomocí intervalu.

Průvodce
Základní mechanismy řešení nerovnic vám ukážu na několika následujících příkladech.

Příklad
Řešme v R nerovnice:

a) $5(x-1)-x(7-x)\leq x^2$

b) $\frac{2x-3}{3}+\frac{3x-2}{2}\geq\frac{1}{6}$

c) $\frac{7x-1}{3}+6>5x-\frac{5+3x}{2}, \quad x\in N$

Řešení.
Používám jen ekvivalentní úpravy, množiny kořenů zapíšu intervalem:

a)

$$\begin{array}{rcll} 5x-5-7x+x^2 & \leq & x^2 & \\ -2x & \leq & 5 & \mid :(-2) \\ x & \geq & -\frac{5}{2} & \end{array}$$

Výsledek: $K=\left\langle -\frac{5}{2};\infty\right)$.

b) nerovnici násobím číslem 6

$$\begin{array}{rcll} 4x-6+9x-6 & \geq & 1 & \\ 13x & \geq & 13 & \mid :13 \\ x & \geq & 1 & \end{array}$$

Výsledek: $K=\langle 1;\infty)$.

$$\begin{aligned} 14x-2+36 &> 30x-15-9x \\ -7x &> -49 \\ x &< 7 \end{aligned}$$

c) Výsledek: $K = (-\infty;7)$.

Úloha 2.1

Řešte v příslušných oborech:

a) $\dfrac{x+3}{2} - \dfrac{x-2}{3} - 5 < \dfrac{x-1}{2}, \quad x \in R^-$

b) $\dfrac{4x-3}{5} - \dfrac{3x-4}{2} + \dfrac{2x-5}{3} < 0, \quad x \in Z$

Návod a řešení naleznete v kapitole 2.5

2.2 Kvadratické nerovnice

Kvadratická nerovnice

Kvadratická nerovnice s neznámou x je nerovnice, kterou lze vyjádřit ve tvaru

$$ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c \le 0, \quad ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c \ge 0 .$$

Jejich řešení lze v R zapsat například pomocí intervalu.

Průvodce

Základní mechanismy řešení nerovnic vám ukáži na několika následujících příkladech. Jsou velmi podobné jako při řešení kvadratické rovnice. A to je také nutný první krok – vyřešit příslušnou kvadratickou rovnici.

Příklad

Řešme v R nerovnice:

a) $x^2 - x - 2 > 0$

b) $x^2 - 6x + 18 > 0$

c) $x^2 + 6x + 15 < 0$

d) $x^2 - x - 2 \le 0$

Řešení.

Nejprve vyřeším příslušné kvadratické rovnice.

a) $x^2 - x - 2 = 0 \to D = 9 \to x_1 = 2, x_2 = -1$. Tedy nerovnici lze zapsat v součinovém tvaru $(x-2)(x+1) > 0$. Součin dvou činitelů je kladný právě tehdy, když jsou oba kladní nebo oba záporní. Obě možnosti zapíšu jako systém nerovnic.

$$\begin{aligned} x-2>0 \quad &\wedge \quad x+1>0 \\ x>2 \quad &\wedge \quad x>-1 \end{aligned} \quad \text{nebo} \quad \begin{aligned} x-2<0 \quad &\wedge \quad x+1<0 \\ x<2 \quad &\wedge \quad x<-1 \end{aligned}$$

. Z první možnosti je $x > 2$, ze druhé možnosti $x < -1$. Výsledek: $K = (-\infty;-1) \cup (2;\infty)$

b) $x^2 - 6x + 18 = 0 \to D = -36 \to x \in \emptyset$. Rovnice nemá řešení.

Průvodce

Z grafického hlediska graf kvadratické funkce (parabola) je buď celá v 1. a 2. kvadrantu, nebo celá ve 3. a 4. kvadrantu. Krátce řečeno, nabývá buď pouze kladných hodnot, nebo záporných. Velmi jednoduše to poznáte například dosazením libovolného reálného čísla z oboru řešení nerovnice. V našem případě dosadím do nerovnice $x = 0 \Rightarrow 18 > 0$, což je pravdivý výrok.

Nerovnice $x^2-6x+18>0$ platí pro libovolné reálné číslo.
Výsledek: $K=R$.

c) $x^2+6x+15=0 \rightarrow D=-24 \rightarrow x \in \emptyset$. Rovnice nemá řešení. Pro $x=1$ však $22 \not< 0$, tedy nerovnice neplatí pro žádné reálné x.
Výsledek: $K=\emptyset$.

d) $x^2-x-2=0 \rightarrow D=9 \rightarrow x_1=2, x_2=-1$. Tedy nerovnici lze zapsat v součinovém tvaru $(x-2)(x+1)\le 0$. Součin dvou činitelů je nekladný právě tehdy, když je jeden činitel kladný a druhý záporný nebo naopak. Oba případy zapíši. Nezapomeňte, že nerovnice je neostrá (platí i pro „=“).

$$\begin{array}{ccc} x-2\ge 0 & \wedge & x+1\le 0 \\ x\ge 2 & \wedge & x\le -1 \end{array} \quad \text{nebo} \quad \begin{array}{ccc} x-2\le 0 & \wedge & x+1\ge 0 \\ x\le 2 & \wedge & x\ge -1 \end{array}$$

Z první možnosti je $x\in\emptyset$, ve druhém případě $-1\le x\le 2$.
Výsledek: $K=\langle -1;2\rangle$.

Průvodce
Ještě připojím řešení neúplných kvadratických rovnic, kdy nemusíte jít cestou hledání kořenů pomocí diskriminantu příslušné kvadratické rovnice.

Příklad
Řešme v R:

a) $x^2+3x\ge 0$
b) $2x^2-8<0$
c) $-x^2-9>0$

Řešení.
a) Na součinový tvar nerovnici převedu vytknutím x, tedy $x(x+3)\ge 0$.
Potom

$$\begin{array}{ccc} x\ge 0 & \wedge & x+3\ge 0 \\ x\ge 0 & \wedge & x\ge -3 \end{array} \quad \text{nebo} \quad \begin{array}{ccc} x\le 0 & \wedge & x+3\le 0 \\ x\le 0 & \wedge & x\le -3 \end{array}.$$

Z první možnosti je $x\ge 0$, ve druhém případě $x\le -3$.
Výsledek: $K=(-\infty;-3\rangle \cup \langle 0;\infty)$.

b) Osamostatním neznámou a nerovnici odmocním
$2x^2-8<0 \rightarrow 2x^2<8 \rightarrow x^2<4 \rightarrow |x|<2$
Výsledek: $K=(-\infty;\sqrt{6})\cup(\sqrt{6};\infty)$.

c) $-x^2-9>0 \rightarrow -9>x^2$, přičemž druhá mocnina libovolného reálného čísla nemůže být záporná. Nerovnice nemá řešení.
Výsledek: $K=\emptyset$.

Úloha 2.2
Řešte v R:

a) $x^2+3x+2\ge 0$
b) $3x^2-7x+4\le 0$

c) $10x - x^2 > 0$

d) $5x^2 - 30 > 0$

Návod a řešení naleznete v kapitole 2.5

2.3 Nerovnice s absolutními hodnotami

Průvodce
Řešení nerovnice s absolutní hodnotou je svým postupem podobné řešení rovnic s absolutními hodnotami. Hlavní úkol je odstranit absolutní hodnoty! Nezapomeňte, nejdříve je nutné určit znaménka výrazů v absolutních hodnotách (kdy jsou kladné a kdy záporné). Ukážu vám to opět na příkladu.

Příklad
Řešme v R sérii jednoduchých nerovnic:

$$|x| > 6; \quad |x| \le 1{,}5; \quad |x| > -5; \quad |x| \le -7$$

Řešení.
Hledáme taková reálná x, jejichž vzdálenosti obrazů na číselné ose od počátku splňují uvedené nerovnice.

$$|x| > 6 \Rightarrow x \in (-\infty;-6) \cup (6;\infty); \quad |x| \le 1{,}5 \Rightarrow x \in \langle -1{,}5;1{,}5 \rangle$$

$$|x| > -5 \Rightarrow x \in R; \quad |x| \le -7 \Rightarrow x \in \emptyset$$

Příklad
Řešme v R následující nerovnice:

a) $|x-5| > 2$

b) $|2x-1| - |x-2| \le 3$

Řešení.
a) Způsobů řešení se nabízí více, jeden z nich vám vyložím. Množinu R rozdělím nulovým bodem výrazu v absolutní hodnotě, $x-5=0 \Rightarrow x=5$, na dva disjunktní intervaly $I_1 = (-\infty;5)$ a $I_2 = \langle 5;\infty)$. V každém z těchto intervalů vyřeším nerovnici zvlášť:

1/ $x \in (-\infty;5) \Rightarrow x-5<0 \Rightarrow |x-5| = -(x-5) = 5-x$. Potom

$$\begin{aligned} 5-x &> 2 \\ -x &> -3 \Rightarrow x \in (-\infty;3) \wedge x \in (-\infty;5) \Rightarrow K_1 = (-\infty;3) \\ x &< 3 \end{aligned}$$

2/ $x \in \langle 5;\infty) \Rightarrow x-5>0 \Rightarrow |x-5| = x-5$. Potom

$$\left.\begin{aligned} x-5 &> 2 \\ x &> 7 \end{aligned}\right. \Rightarrow x \in (7;\infty) \wedge x \in \langle 5;\infty) \Rightarrow K_2 = (7;\infty)$$

Výsledek: $K = K_1 \cup K_2 = (-\infty;3) \cup (7;\infty)$.

b) Nulové body jsou dva, $x = \frac{1}{2}; 2$. Intervaly jsou tři $I_1 = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$, $I_2 = \left\langle \frac{1}{2}; 2 \right)$ a $I_3 = \langle 2; \infty)$. Znaménka jednotlivých výrazů v příslušných intervalech vám zapíši do tabulky.

x	$I_1 = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$	$I_2 = \left\langle \frac{1}{2}; 2 \right)$	$I_3 = \langle 2; \infty)$
$2x-1$	-	+	+
$x-2$	-	-	+

Řešme nyní nerovnici v jednotlivých intervalech:

1/ $I_1 = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned} -2x+1-[-(x-2)] &\leq 3 \\ -x &\leq 4 \quad \Rightarrow x \in \langle -4; \infty) \wedge x \in I_1 \Rightarrow K_1 = \left\langle -4; \frac{1}{2} \right) \\ x &\geq -4 \end{aligned}$$

2/ $I_2 = \left\langle \frac{1}{2}; 2 \right)$

$$\begin{aligned} 2x-1-[-(x-2)] &\leq 3 \\ 3x &\leq 6 \Rightarrow x \in (-\infty; 2\rangle \wedge x \in I_2 \Rightarrow K_2 = I_2 = \left\langle \frac{1}{2}; 2 \right) \\ x &\leq 2 \end{aligned}$$

3/ $I_3 = \langle 2; \infty)$

$$\begin{aligned} 2x-1-(x-2) &\leq 3 \\ 2x-1-x+2 &\leq 3 \Rightarrow x \leq 2 \wedge x \in \langle 2; \infty) \Rightarrow K_3 = \{2\} \\ x &\leq 2 \end{aligned}$$

Výsledek: $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \langle -4; 2 \rangle$.

Úloha 2.3

Řešte v R:

a) $|5x-7| > 10x-13$

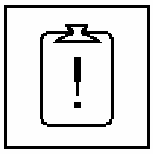
b) $|x+5| < |2x-1|$

Návod a řešení naleznete v kapitole 2.5

<u>Průvodce</u>

Ještě vám zmíním problematiku řešení kvadratických nerovnic s absolutní hodnou. Princip řešení je stejný jako u předcházejících úloh, tj. odstranit absolutní hodnotu. To lze však jen tehdy, když víme znaménko výrazu uvnitř absolutní hodnoty. U kvadratických výrazů je to někdy mírně složitější, proto věnujte následujícím ukázkám řešení zvýšenou pozornost.

Příklad



Řešme v R následující nerovnice:

a) $x^2-5|x|+6<0$

b) $\left|x^2-2x\right|<x$

Řešení.

a) Nulový bod $x=0$ rozdělí reálnou osu na dva intervaly $I_1=(-\infty;0)$ a $I_2=\langle 0;\infty)$. V každém z těchto intervalů vyřeším nerovnici zvlášť.

1/ $x\in(-\infty;0)$. Potom řešíme nerovnici způsobem, který jsem vám ukázal v předcházející kapitole.

$$\begin{aligned} x^2-5(-x)+6 &< 0 \\ x^2+5x+6 &< 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &D=1 \Rightarrow\rightarrow x_1=-2, x_2=-3 \Rightarrow (x+2)(x+3)<0 \rightarrow \\ &\rightarrow x\in(-3;-2) \wedge x\in(-\infty;0) \Rightarrow K_1=(-3;-2) \end{aligned}$$

2/ $x\in\langle 0;\infty)$. Potom řešíme nerovnici

$$x^2-5x+6<0 \Rightarrow \begin{aligned} &D=1 \Rightarrow\rightarrow x_1=2, x_2=3 \Rightarrow (x-2)(x-3)<0 \rightarrow \\ &\rightarrow x\in(2;3) \wedge x\in(0;\infty) \Rightarrow K_2=(2;3) \end{aligned}$$

Výsledek: $K=K_1\cup K_2=(-3;-2)\cup(2;3)$.

b) Nulové body $x(x-2)=0 \Rightarrow x=0;2$, intervaly jsou $I_1=(-\infty;0)$, $I_2=\langle 0;2)$ a $I_3=\langle 2;\infty)$. Znaménko výrazu jsem vám zapsal do tabulky.

x	$I_1=(-\infty;0)$	$I_2=\langle 0;2)$	$I_3=\langle 2;\infty)$
x^2-2x	+	-	+

Řešme nerovnici v jednotlivých případech.

1/ $I_1=(-\infty;0)$ a $I_3=\langle 2;\infty)$

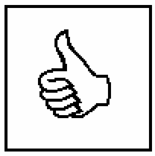
$$\begin{aligned} x^2-2x &< x \\ x^2-3x &< 0 \end{aligned} \Rightarrow x(x-3)<0 \Rightarrow x\in(0;3) \wedge x\in I_1\cup I_3 \Rightarrow K_1=\langle 2;3)$$

2/ $I_2=\langle 0;2)$

$$\begin{aligned} -x^2+2x &< x \\ -x^2+x &< 0 \end{aligned} \Rightarrow x(-x+1)<0 \Rightarrow x\in(-\infty;0)\cup(1;\infty) \wedge x\in I_2 \Rightarrow K_2=(1;2)$$

Výsledek: $K=K_1\cup K_2=(1;3)$.

2.4 Nerovnice v součinovém a podílovém tvaru



Průvodce

Jde o nerovnice tvaru součinu nebo podílu dvou nebo více členů. Nerovnice v součinovém tvaru intuitivně řešíte už od kapitoly 2.2 kvadratické nerovnice. Podstata této části je opět v diskusi, kdy je součin nebo podíl několika výrazů kladný, záporný nebo roven nule.

Příklad

Řešme v R následující nerovnice:

a) $(x+4)(x-1)>0$

b) $(1-x)\left(x+\sqrt{2}\right)<0$

c) $9x^2 \geq 4$

Řešení.

Metod řešení je hned několik. Například metoda grafická nebo tabulkou zapsány znaménka činitelů součinu apod. Já se zaměřím na námi již použitou metodu.

a) Součin dvou čísel je větší než nula právě tehdy, když jsou buď oba činitelé větší než nula nebo oba menší než nula:

$$\begin{array}{ccc} x+4>0 & \wedge & x-1>0 \\ x>-4 & \wedge & x>1 \end{array} \quad \text{nebo} \quad \begin{array}{ccc} x+4<0 & \wedge & x-1<0 \\ x<-4 & \wedge & x<1 \end{array}$$

Z první možnosti je $x>1$, ve druhém případě $x<-4$.

Výsledek: $K=(-\infty;-4)\cup(1;\infty)$.

b) Postupujeme analogicky s tím, že v tomto případě musí mít činitelé rozdílné znaménka, aby jejich součin byl menší než nula:

$$\begin{array}{ccc} 1-x>0 & \wedge & x+\sqrt{2}<0 \\ x<1 & \wedge & x<\sqrt{2} \end{array} \quad \text{nebo} \quad \begin{array}{ccc} 1-x<0 & \wedge & x+\sqrt{2}>0 \\ x<1 & \wedge & x>\sqrt{2} \end{array}$$

Z první možnosti je $x<1$, ve druhém případě $x\in\emptyset$.

Výsledek: $K=(-\infty;1)$.

c) Provedu nejprve úpravu a poté rozklad na součin (viz. řešení neúplných kvadratických nerovnic, kap. 2.2)

$9x^2 \geq 4 \rightarrow 9x^2-4\geq 0 \rightarrow (3x-2)(3x+2)\geq 0$. Postupujeme analogicky jako v (a), s rozdílem, že rovnost může nastat.

Výsledek: $K=\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right\rangle\cup\left\langle\frac{2}{3};\infty\right)$.

Průvodce

Podobnými úvahami řešíme nerovnice v podílovém tvaru. Jen s tím rozdílem, že se nejedná o součin, ale podíl dvou nebo více činitelů a dále, ve jmenovateli nikdy nemůže být nula!! Proto pozor na podmínky!

Příklad

Řešme v R nerovnice:

a) $\dfrac{2x+3}{x-2}>0$

b) $\dfrac{1-2x}{2-x}<2$

Řešení.

Zlomek je kladný právě tehdy, když čitatel a jmenovatel mají stejné znaménko (oba kladné nebo oba záporné).

a) Další postup je obdobný jako v předcházející části:

$$\begin{array}{lcl} 2x+3>0 & \wedge & x-2>0 \\ x>-\frac{3}{2} & \wedge & x>2 \end{array} \quad \text{nebo} \quad \begin{array}{lcl} 2x+3<0 & \wedge & x-2<0 \\ x<-\frac{3}{2} & \wedge & x<2 \end{array}$$

Z první možnosti je $x>2$, ve druhém případě $x<-\frac{3}{2}$.

Výsledek: $K=\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup(2;\infty)$.

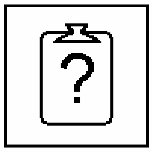
b) Je velmi výhodné porovnávat zlomek s nulou, proto nerovnici upravím následovně:

$$\frac{1-2x}{2-x}<2 \quad\rightarrow\quad \frac{1-2x}{2-x}-2<0 \quad\rightarrow\quad \frac{1-2x-2(2-x)}{2-x}<0 \quad\rightarrow\quad \frac{-3}{2-x}<0.$$

Čitatel je záporný, takže jmenovatel musí být kladný, aby celý zlomek byl menší než nula. $2-x>0 \quad\rightarrow\quad x<2$.

Výsledek: $K=(-\infty;2)$.

Úloha 2.4



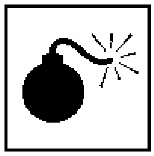
Řešte v R:

a) $\frac{2x-15}{3x+7}<\frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{3}<\frac{2+x}{3+x}$

Návod a řešení naleznete v kapitole 2.5.

2.5 Shrnutí kapitoly a řešení úloh

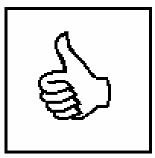


V této kapitole jste poznali základní typy nerovnic a mechanismy jejich řešení. Mezi **ekvivalentní úpravy** patří:

1. Vzájemná výměna obou stran nerovnice se **změnou znaku nerovnice**.
2. Nahrazení některé strany nerovnice výrazem, který je jí roven v celém oboru řešení nerovnice.
3. Přičtení téhož čísla nebo výrazu majícího smysl v celém oboru řešení nerovnice k jejím oběma stranám.
4. a) Násobení/dělení obou stran rovnice týmž kladným číslem nebo výrazem, který je definován a nabývá pouze kladných hodnot v celém oboru řešení nerovnice.

   b) Násobení/dělení obou stran rovnice týmž záporným číslem nebo výrazem, který je definován a nabývá pouze záporných hodnot v celém oboru řešení nerovnice **se současnou změnou znaku nerovnosti**.

Hlavní odlišností při řešení nerovnic je násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem nebo výrazem, čímž dojde ke změně znaménka nerovnice v opačné.



Průvodce

Jako trénink před konzultací doporučuji propočítat následující sérii korespondenčních úloh.

Korespondenční úlohy ke kapitole 2.1
Literatura [2], kapitola III. Algebraické nerovnice a jejich soustavy, strana 104 – 105,

cvičení 1.1 – 3 úlohy
cvičení 1.2 – 2 úlohy.

Korespondenční úlohy ke kapitole 2.2
Literatura [2], kapitola III. Algebraické nerovnice a jejich soustavy, strana 110

cvičení 2.1 – 3 úlohy
cvičení 1.2 – 2 úlohy.

Korespondenční úlohy ke kapitole 2.3
Literatura [2], kapitola III. Algebraické nerovnice a jejich soustavy, strana 121 – 122,

cvičení 4.1 – 3 úlohy
cvičení 4.3 – 2 úlohy
cvičení 4.5 – 2 úlohy
cvičení 4.11 – 2 úlohy.

Korespondenční úlohy ke kapitole 2.4
Literatura [2], kapitola III. Algebraické nerovnice a jejich soustavy, strana 115 – 116,

cvičení 3.1 – 3 úlohy
cvičení 3.5 – 2 úlohy.

Řešení úloh

Řešení úlohy 2.1

Nerovnice nejprve upravte.
a) nerovnici vynásobím číslem 6:

$$\begin{array}{lll} 3x+9-2x+4-30 & < & 3x-3 \\ -2x & < & 14 \\ x & > & -7 \quad \Rightarrow x \in (-7;\infty) \end{array}$$

Výsledek: Úlohu řešíme v R^-, tedy $K = (-7;0)$.

b) podobně nerovnici vynásobím 30

$$\begin{array}{lll} \frac{4x-3}{5} - \frac{3x-4}{2} + \frac{2x-5}{3} & < & 0 \\ 24x-18-45x+60+20x-50 & < & 0 \\ -x & < & 8 \qquad |\cdot(-1) \\ x & > & -8 \quad \Rightarrow x \in (-8;\infty) \end{array}$$

Výsledek: Úlohu řešíme v Z, tedy $K = \{-7;-6;-5;\ldots\}$.

Řešení úlohy 2.2

a) $x^2+3x+2=0 \rightarrow D=1 \rightarrow x_1=-2, x_2=-1$.

Součinový tvar nerovnice $(x+2)(x+1)\geq 0$, odkud píši

$$\begin{array}{ccc} x+2\geq 0 & \wedge & x+1\geq 0 \\ x\geq -2 & \wedge & x\geq -1 \end{array} \quad \text{nebo} \quad \begin{array}{ccc} x+2\leq 0 & \wedge & x+1\leq 0 \\ x\leq -2 & \wedge & x\leq -1 \end{array}.$$

Výsledek: $K=\left(-\infty;-2\right\rangle \cup \left\langle -1;\infty\right)$.

b) $3x^2-7x+4=0 \rightarrow D=1 \rightarrow x_1=\frac{4}{3}, x_2=1$.

Součinový tvar nerovnice $\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-1)\leq 0$, odkud píši

$$\begin{array}{ccc} x-\frac{4}{3}\geq 0 & \wedge & x-1\leq 0 \\ x\geq \frac{4}{3} & \wedge & x\leq 1 \end{array} \quad \text{nebo} \quad \begin{array}{ccc} x-\frac{4}{3}\leq 0 & \wedge & x-1\geq 0 \\ x\leq \frac{4}{3} & \wedge & x\geq 1 \end{array}.$$

Výsledek: $K=\left\langle 1;\frac{4}{3}\right\rangle$.

c) Na součinový tvar nerovnici převeďte vytknutím $10x-x^2>0 \rightarrow x(10-x)>0$.
Potom

$$\begin{array}{ccc} x>0 & \wedge & 10-x>0 \\ x>0 & \wedge & x<10 \end{array} \quad \text{nebo} \quad \begin{array}{ccc} x<0 & \wedge & 10-x<0 \\ x<0 & \wedge & x>10 \end{array}.$$

Výsledek: $K=(0;10)$

d) $5x^2-30>0 \rightarrow 5x^2>30 \rightarrow x^2>6 \rightarrow |x|>\sqrt{6}$

Výsledek: $K=\left(-\infty;\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6};\infty\right)$.

Řešení úlohy 2.3

a) nulový bod $x=\frac{7}{5}$, $I_1=\left(-\infty;\frac{7}{5}\right)$ a $I_2=\left\langle\frac{7}{5};\infty\right)$.

1/ $x\in\left(-\infty;\frac{7}{5}\right) \Rightarrow \begin{array}{ccc} -5x+7 & > & 10x-13 \\ -15x & > & -20 \\ x & < & \frac{4}{3} \end{array} \Rightarrow x\in\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)\wedge x\in I_1 \Rightarrow K_1=\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)$

2/ $I_2=\left\langle\frac{7}{5};\infty\right) \Rightarrow \begin{array}{ccc} 5x-7 & > & 10x-13 \\ x & < & \frac{6}{5} \end{array} \Rightarrow x<\frac{6}{5}\wedge x\in\left\langle\frac{7}{5};\infty\right) \Rightarrow K_2=\emptyset$

Výsledek: $K=K_1\cup K_2=\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)$.

b) $I_1=(-\infty;-5)$, $I_2=\left\langle -5;\frac{1}{2}\right)$ a $I_3=\left\langle\frac{1}{2};\infty\right)$. Znaménka jednotlivých výrazů v příslušných intervalech vám zapíši do tabulky.

x	$I_1=(-\infty;-5)$	$I_2=\left\langle -5;\frac{1}{2}\right)$	$I_3=\left\langle\frac{1}{2};\infty\right)$
$x+5$	-	+	+
$2x-1$	-	-	+

Řeším nerovnici v jednotlivých případech:

1/ $I_1 = (-\infty; -5)$ $\quad \begin{array}{rcl} -x-5 & < & -2x+1 \\ x & < & 6 \end{array} \quad \Rightarrow K_1 = (-\infty; -5)$

2/ $I_2 = \left\langle -5; \frac{1}{2} \right)$ $\quad \begin{array}{rcl} x+5 & < & -2x+1 \\ x & < & -\frac{4}{3} \end{array} \quad \Rightarrow K_2 = \left\langle -5; -\frac{4}{3} \right)$

3/ $I_3 = \left\langle \frac{1}{2}; \infty \right)$ $\quad \begin{array}{rcl} x+5 & < & 2x-1 \\ x & > & 6 \end{array} \quad \Rightarrow K_3 = (6; \infty)$

Výsledek: $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \left(-8; \frac{4}{3} \right) \cup (6; \infty)$.

Řešení úlohy 2.4

a) $\frac{2x-15}{3x+7} - \frac{1}{2} < 0 \quad \to \quad \frac{2(2x-15)-(3x+7)}{2(3x+7)} < 0 \quad \to \quad \frac{x-37}{2(3x+7)} < 0$

$\begin{array}{ccc} x-37 > 0 & \wedge & 2(3x+7) < 0 \\ x > 37 & \wedge & x < -\frac{7}{3} \end{array}$ nebo $\begin{array}{ccc} x-37 < 0 & \wedge & 2(3x+7) > 0 \\ x < 37 & \wedge & x > -\frac{7}{3} \end{array}$

Z první možnosti je $x \in \emptyset$, ve druhém případě $-\frac{7}{3} < x < 37$.

Výsledek: $K = \left(-\frac{7}{3}; 37 \right)$.

b) $\frac{2}{3} < \frac{2+x}{3+x} \quad \to \quad 0 < \frac{x}{3(3+x)} \quad \to$

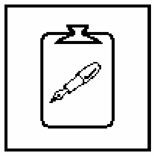
$\to \begin{pmatrix} x > 0 & \wedge & 3(3+x) > 0 \\ x > 0 & \wedge & x > -3 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} x < 0 & \wedge & 3(3+x) < 0 \\ x < 0 & \wedge & x < -3 \end{pmatrix}$

Výsledek: $K = (-\infty; -3) \cup (0; \infty)$.

3 Soustavy lineárních rovnic a nerovnic

<u>V této kapitole se dozvíte</u>: *mechanismy řešení soustav dvou lineárních rovnic metodou sčítací a dosazovací; jak používat eliminační metodu pro řešení soustavy tří lineárních rovnic; jak řešit soustavu nerovnic o jedné neznámé*

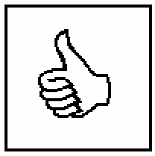
<u>V této kapitole se naučíte</u>: *řešit početně soustavy lineárních rovnic nebo nerovnic o dvou a třech neznámých metodou dosazovací, sčítací a eliminační*



<u>Klíčová slova kapitoly</u>: ***soustava rovnic; soustava nerovnic; dosazovací metoda; sčítací metoda, eliminační metoda.***

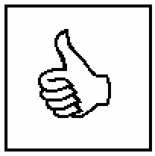
<u>Čas potřebný pro prostudování kapitoly</u>*:*

2 + 7 hodin (teorie + řešení příkladů)



<u>Průvodce</u>
V poslední kapitole této opory vám ukážu dvě metody řešení soustav dvou lineárních rovnic – metodu sčítací a metodu dosazovací, pro soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých metodu eliminační. Dalším metodám se v této opoře věnovat nebudu. Zájemce o toto téma odkazuji na literaturu [9].

3.1 Soustavy lineárních rovnic



<u>Průvodce</u>
Nejprve si něco řekneme o lineárních rovnicích se dvěma neznámými. Jsou to rovnice tvaru $ax+by+c=0,\quad a,b,c\in R$ jsou konstanty a $x,y\in R$ jsou dvě neznámé. Příklad takové rovnice: $2x-3y=5$.

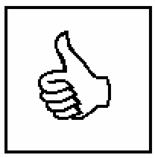
Soustava rovnic

Soustavou dvou lineárních rovnic s dvěma neznámými $x,y\in R$ je dvojice rovnic tvaru $\begin{matrix} L_1(x,y)=P_1(x,y) \\ L_2(x,y)=P_2(x,y) \end{matrix}$, které musí platit zároveň.
Je třeba chápat tento systém rovnic jako celek. Základní typy úprav zmíním v následující odstavci.

Ekvivalentní úpravy

Ekvivalentní úpravy soustavy rovnic:

1. Nahrazení libovolné rovnice soustavy rovnicí s ní ekvivalentní.
2. Nahrazení libovolné rovnice soustavy součtem této rovnice a libovolné další rovnice soustavy.
3. Dosazení neznámé z jedné rovnice soustavy do jiné její rovnice.



<u>Průvodce</u>
Cílem početních operací je získat řešení, tedy nalézt všechny uspořádané dvojice $[x;y]$, které po dosazení do soustavy splní všechny její rovnice. Základním principem těchto operací je vyloučení (eliminace) jedné z neznámých. V podstatě rozlišujeme tři metody. Řešením jsou pak uspořádané dvojice $[x;y]$.

Základní početní metody řešení soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými $x, y \in R$**:**

Sčítací metoda

1. Metoda sčítací – každá z rovnic soustavy se vynásobí vhodným číslem tak, aby se po sečtení příslušných stran takto vynásobených rovnic vyloučila jedna z neznámých.

Dosazovací metoda

2. Metoda dosazovací – z jedné rovnice se vyjádří jedna z neznámých pomocí druhé neznámé a toto vyjádření se dosadí do druhé rovnice.

Srovnávací metoda

3. Metoda srovnávací – z obou rovnic se vyjádří tatáž neznámá pomocí druhé neznámé a porovnáním obou vyjádření se vyloučí první neznámá

Jednotlivé metody i možnosti řešení si teď ukážeme na několika příkladech.

Průvodce
Jen připomenu, že jsou tři možné výsledky. Řešením soustavy je jedna uspořádaná dvojice, nebo jich je nekonečně mnoho, nebo soustava rovnic nemá žádné řešení.

Příklad

Řešme v R^2 sčítací metodou soustavu rovnic $\begin{array}{rcl} x+2y & = & 7 \\ 5x+4y & = & 11 \end{array}$.

Řešení.
První rovnici vynásobím číslem –2, po sečtení s druhou rovnicí bude vyloučena neznámá y.

$$\begin{array}{rcl} -2x-4y & = & -14 \\ 5x+4y & = & 11 \end{array} \quad \oplus \rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1.$$

Dosazením do libovolné rovnice vypočítám y: $-1+2y=7 \rightarrow 2y=8 \Rightarrow y=4$.
Výsledek: $K=\{[-1;4]\}$.

Příklad

Řešme v R^2 dosazovací metodou soustavu rovnic $\begin{array}{rcl} 4x-2y & = & 3 \\ 8x-4y & = & 6 \end{array}$.

Řešení.

Z první rovnice vyjádřím neznámou y, $4x-3=2y \Rightarrow y=\dfrac{4x-3}{2}$ a dosadím do druhé rovnice. $8x-4\cdot\dfrac{4x-3}{2}=6 \rightarrow 8x-8x+6=6 \rightarrow 0\cdot x=0$. Této rovnici vyhovuje každé reálné číslo x.

Průvodce
Tato soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení. Ale ne každá uspořádaná dvojice reálných čísel vyhovuje této soustavě. Proto i řešení musíme zapsat v odpovídajícím tvaru, nekonečně mnoho uspořádaných dvojic tvaru $\left[x;\dfrac{4x-3}{2}\right]$.

Výsledek: $K = \left\{ \left[x; \frac{4x-3}{2} \right], x \in R \right\}$.

Příklad

Řešme v R^2 dosazovací metodou soustavu rovnic $\begin{array}{rcl} 5x-2y & = & 3 \\ 10x-4y & = & 5 \\ \hline \end{array}$.

Řešení.

Z první rovnice vyjádřím neznámou y, $5x-3=2y \Rightarrow y=\frac{5x-3}{2}$ a dosadím do druhé rovnice. $10x-4\cdot\frac{5x-3}{2}=6 \to 10x-10x+12=6 \to 0\cdot x=-6$. Této rovnici vyhovuje žádné reálné číslo x.

Výsledek: $K=\emptyset$.

Úloha 3.1

Řešte v R^2 soustavu rovnic:

a) $\begin{array}{rcl} 2(x+y)-5(y-x) & = & 17 \\ 3(x+2y)+7(3x+5y) & = & 7 \\ \hline \end{array}$

b) $\begin{array}{rcl} y & = & -\frac{1}{3}x+2 \\ \frac{y}{2}+\frac{x}{6} & = & 1 \\ \hline \end{array}$

Návod a řešení naleznete v kapitole 3.3

Průvodce

Jen v krátkosti vám ukážu řešení soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých $x, y, z \in R$. Metod řešení soustav lineárních rovnic s větším počtem neznámých je více, viz. například lineární algebra a matice. Nicméně ukážu vám méně náročný postup založený na principech popsaných výše. Cílem bude postupně vyloučit neznámé z jednotlivých rovnic tak, že zůstane jedna rovnice o jedné neznámé.

Příklad

Řešme v R^3 soustavu rovnic $\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ x+2y+2z & = & 2 \\ 2x+2y+z & = & 3 \\ \hline \end{array}$.

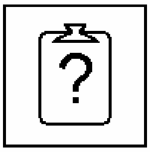
Řešení.

Metoda, kterou vám ukážu, se jmenuje Gaussova eliminační metoda. Sledujte pozorně jednotlivé kroky. Cílem je postupně vyloučit neznámé x, y z některých rovnic. Vhodně vynásobím první rovnici a přičtu ke druhé, resp. třetí rovnici.

$$\begin{array}{rcll} x+y+z & = & 1 & \big|\cdot(-1) \quad \big|\cdot(-2) \\ x+2y+2z & = & 2 & \hookleftarrow\oplus \\ 2x+2y+z & = & 3 & \qquad\qquad \hookleftarrow\oplus \\ \hline \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ y+z & = & 1 \\ -z & = & 1 \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow z=-1.$$

Dosadím $z=-1$ do druhé rovnice, odkud pak $y=2$; následně dosadím za y a x do první rovnice, odkud pak $x=0$.
Výsledek: $K=\{[0;2;-1]\}$.

Úloha 3.2

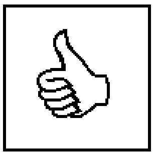


Řešte v R^3 soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x+2y-3z &= -8 \\ -3x+y+2z &= 10 \\ 2x-3y+2z &= 5 \end{aligned}.$$

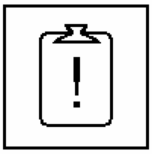
Návod a řešení naleznete v kapitole 3.3

3.2 Soustavy lineárních nerovnic



Průvodce
Ve druhé kapitole jsem vám ukázal řešení několika typů nerovnic. Někdy však hledáme čísla, která vyhovují zároveň několika nerovnicím s jednou neznámou – soustavě nerovnic. Postup řešení je následující – vyřešte postupně jednotlivé nerovnice a výsledné řešení je pak průnikem množin všech řešení jednotlivých nerovnic soustavy.

Příklad



Řešme v R soustavu nerovnic:

a) $\begin{cases} \dfrac{1-2x}{3} < \dfrac{1+3x}{4} \\ 1-7x \geq -6x \end{cases}$

b) $3x-4 \leq 2x+5 < 4x-1$

Řešení.

a) Jednotlivé nerovnice postupně vyřeším:

$$\begin{aligned} \frac{1-2x}{3} &< \frac{1+3x}{4} \quad \Big| \cdot 12 \\ 4-8x &< 3+9x \\ \frac{1}{17} &< x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 1-7x &\geq -6x \\ -x &\geq -1 \\ x &\leq 1 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \frac{1}{17} < x \leq 1$$

Výsledek: $K=\left(\frac{1}{17};1\right\rangle$.

b) Rozepíšu jednotlivé vztahy a opět nerovnice vyřeším.

$$3x-4 \leq 2x+5 < 4x-1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 3x-4 \leq 2x+5 \\ 2x+5 < 4x-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3x-4 &\leq 2x+5 \\ x &\leq 9 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x+5 &< 2x+5 \\ -2x &< -6 \\ &> 3 \end{aligned} \qquad \Rightarrow 3 < x \leq 9$$

Výsledek: $K=(3;9\rangle$.

Úloha 3.3

Řešte v R $\begin{cases} x+3 < 4+2x \\ 5x-4 < 4x-1 \quad x \in N \end{cases}$

Návod a řešení naleznete v kapitole 3.3

3.3 Shrnutí kapitoly a řešení úloh

Tato kapitola se věnovala soustavám lineárních rovnic a nerovnic.
V první části jsme si ukázali řešení soustav dvou lineárních rovnic metodou sčítací a dosazovací. Poznali jsem tři možné případy řešení soustavy – jediné řešení $[x; y]$, nekonečně mnoho řešení $[x; f(x)]$, resp. $[f(y); y]$, soustava nemá žádné řešení.
Druhá část je věnovaná soustavám lineárních nerovnic. Metoda řešení soustavy nerovnic spočívá ve vyřešení jednotlivých nerovnic a následně sestavení průniku řešení jednotlivých nerovnic.

Průvodce
Jako trénink před konzultací doporučuji propočítat následující sérii korespondenčních úloh.

Korespondenční úlohy ke kapitole 3.1
Literatura [2], kapitola II. Algebraické rovnice a jejich soustavy, strana 91 – 95,
cvičení 4.1.1 – 3 úlohy
cvičení 4.1.2 – 2 úlohy
cvičení 4.1.6 – 2 úlohy.

Korespondenční úlohy ke kapitole 3.2
Literatura [2], kapitola III. Algebraické nerovnice a jejich soustavy, strana 105 – 106,
cvičení 1.5 – 2 úlohy
cvičení 1.6 – 2 úlohy.

Řešení úloh

Řešení úlohy 3.1

Návrh postupu. Jednotlivé rovnice nejprve upravte:

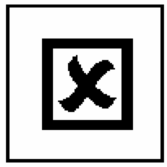
$$\begin{array}{rcl} 2(x+y)-5(y-x) & = & 17 \\ 3(x+2y)+7(3x+5y) & = & 7 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rcl} 7x-3y & = & 17 \\ 24x+41y & = & 7 \end{array}$$

Z první rovnice vyjádřete x; $x = \dfrac{17+3y}{7}$ a dosaďte do druhé rovnice.

$24 \cdot \dfrac{17+3y}{7} + 41y = 7 \quad \Big| \cdot 7 \quad \rightarrow 359y = -359 \Rightarrow y = -1$. Pak $x = \dfrac{17+3y}{7} = \dfrac{17-3}{7} = 2$

Výsledek: $K = \{[2;-1]\}$.

Řešení úlohy 3.2



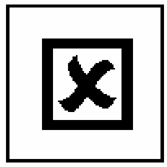
$$\begin{array}{rcl|l|l} x+2y-3z & = & -8 & \cdot 3 & \cdot(-2) \\ -3x+y+2z & = & 10 & \hookleftarrow\oplus & \\ 2x-3y+2z & = & 5 & & \hookleftarrow\oplus \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{rcll} x+2y-3z & = & -8 & \\ 7y-7z & = & -14 & \oplus \\ -7y+8z & = & 21 & \hookleftarrow \\ \hline \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{rcl} x+2y-3z & = & -8 \\ 7y-7z & = & -14 \\ z & = & 7 \\ \hline \end{array}$$

. Postupně dosazujte do druhé rovnice $y=\dfrac{-14+49}{7}=5$, pak do první rovnice $x=-8+21-10=3$.

Výsledek: $K=\{[3;5;7]\}$.

Řešení úlohy 3.3



$$\begin{array}{rcl} x+3 & < & 4+2x \\ -x & < & 1 \\ x & > & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 5x-4 & < & 4x-1 \\ x & < & 3 \end{array} \wedge x\in N$$

Výsledek: $K=\{1;2\}$.

Rejstřík

Literatura

[1] JANEČEK, František. *Maturujeme z matematiky*. Praha : Fi BLUG.
ISBN 80-85635-39-9

[2] JANEČEK, František. *Výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy*.
Praha : Prometheus. 2003.
ISBN 80-7196-076-4

[3] JIRÁSEK, František a kol. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ*.
Praha : SPN. 1986.

[4] KUBÁT, Josef a kol. *Maturitní minimum*. Praha : Prometheus. 1996.
ISBN 80-7196-030-6

[5] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. Praha : SPN. 1991.
ISBN 80-04-22885-2

[6] POLÁK, Josef. *Středoškolská matematika v úlohách I*. Praha : Prometheus.
1996.
ISBN 80-7196-021-7

[7] VEJSADA, František a kol. *Sbírka úloh z matematiky*. Praha : SPN. 1969.

[8] ZHOUF, Jaroslav. *Sbírka testových úloh k maturitě z matematiky*.
Praha : Prometheus. 2002.
ISBN 80-7196249-X

[9] ZHOUF, J., CHARVÁT, J., BOČEK, L. *Rovnice a nerovnice.*
Matematika pro gymnázia.
Praha : Prometheus. 2003.
ISBN 80-7196-154-X

Poznámky

Základní pravidla výpočtu matematických úloh
Rovnice a nerovnice

RNDr. Michal Vavroš, Ph.D.

Ostrava 2006

Název	Základní pravidla výpočtu matematických úloh Rovnice a nerovnice
Editor	RNDr. Michal Vavroš, Ph.D.
Vydavatel	Wichterlovo gymnázium, Ostrava–Poruba, příspěvková organizace
Rozsah	63 stran
Vydání	první, 2006
Tisk	Wichterlovo gymnázium, Ostrava–Poruba
Doporučená cena	**zdarma**; vytvořeno v rámci projektu SIPVZ 2006

ISBN 80-903647-9-9