Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669

STUDIJNÍ OPORA DISTANČNÍHO VZDĚLÁVÁNÍ

ZÁKLADNÍ PRAVIDLA VÝPOČTU MATEMATICKÝCH ÚLOH

ALGEBRAICKÉ ÚLOHY

MICHAL VAVROŠ

Ostrava 2005

Zpracoval: RNDr. Michal Vavroš
Recenzenti: Doc. RNDr. Pavel Květoň, CSc.
Mgr. Libor Koníček

Publikace byla vytvořena v rámci projektu Státní informační politiky ve vzdělávání v roce 2005.

ISBN 80-903 647-5-6

Obsah opory

Úvod

Vážení čtenáři,

máte před sebou studijní text určený pro studenty matematiky prvního ročníku gymnázia v rámci distančního vzdělávání. To, že je určený pro gymnázia, nevylučuje možnost jeho použití na jiné střední škole, může sloužit i zájemcům o úvodní partie matematiky z oblasti algebry. Nejde o manuál, ve kterém bych v abecedním pořádku uvedl a popsal všechny možné metody, postupy a úlohy z oblasti algebry. Snažil jsem se na tomto omezeném prostoru přiblížit vám nejzákladnější algebraické techniky a dovednosti, bez kterých není možné zvládnout další studium středoškolské matematiky. Dovednost upravovat algebraické výrazy je zcela nepostradatelná při řešení mnoha matematických úloh, v teoretických úvahách i pro použití matematiky v praxi. Ve třech kapitolách je provedeno shrnutí a systemizace základních poznatků ze středoškolské algebry, především úprav číselných výrazů, mnohočlenů a algebraických výrazů. Přitom nezbytnou součástí těchto úprav je stanovení podmínky, za níž mají úpravy smysl.

Většina pojmů a dovedností uvedených v 1. kapitole je vám známa již ze základní školy, pro mnohé z vás to bude jen jako kondiční trénink pro sportovce. Přesto čtěte text pozorně a nepodceňujte jej. Formulace, postupy a jiné dovednosti jsou zde vysvětleny přesněji a provedeny precizněji, logicky na sebe navazují. A navíc, je třeba určité věci připomenout a oživit v paměti. Tím lépe pak zvládnete další kapitoly a učivo vám bude připadat jednodušší.

V kapitolách 2 a 3 najdete shrnutí poznatků z oblasti úprav mnohočlenů a algebraických výrazů. V několika odstavcích jsem shrnul techniky stanovování definičního oboru výrazů, popř. některé speciální úlohy na téma důkazů algebraických rovností a nerovností.

Cílem textu je, abyste po jeho nastudování zvládali používání nejrůznějších algebraických technik, byli schopni vybrat z několika možných metod tu efektivnější. Tento text jistě není sbírkou všech typů úloh. V opoře vám předkládám základní typy algebraických úloh. Na procvičení a upevnění nabytých dovedností sáhněte i po jiných sbírkách úloh, tipy na některé sbírky najdete v citované literatuře.

Hodně trpělivosti a vytrvalosti při studiu vám přeje

Michal Vavroš

Po prostudování opory budete znát:

- základní algebraické techniky
- číselné obory a jejich značení
- pojem interval, typy intervalů, jejich značení a základní operace s nimi
- pojem mnohočlen, základní typy mnohočlenů, operace s mnohočleny – sčítání, odčítání, násobení a dělení, vzorce pro umocňování jednočlenu a dvojčlenu
- možnosti rozkladu mnohočlenu na součin

Po prostudování opory budete schopni:

- orientovat se v číselných oborech a jejich značkách
- orientovat se v základních pojmech středoškolské algebry
- upravit číselný výraz
- upravit algebraický výraz a stanovit podmínku jeho platnosti
- ovládat postupy při řešení racionálních a iracionálních algebraických výrazů.

Získáte:

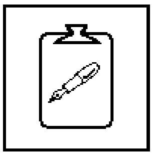
- přehled o používaných algebraických metodách a technikách
- zručnost a dovednosti nezbytné pro zvládnutí dalších partií matematiky
- získáte dovednosti v numerických výpočtech
- budete lépe rozumět matematickému jazyku.

1 Základní poznatky

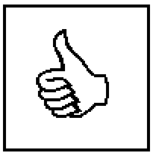
<u>V této kapitole se dozvíte</u>: *základní pojmy z oblasti množin, jak značit číselné obory, jak provádět číselné operace, význam pojmu interval a jeho možné zápisy, jeho využití při zápisu řešení úlohy nebo jeho části.*

<u>V této kapitole se naučíte</u>: *rozlišovat číselné obory a jejich zápisy, zařazovat číslo do příslušného číselného oboru; chápat vztah rovnosti a inkluze mezi množinami; základní numerické výpočty a pravidla při s počítání číselnými výrazy, základní vlastnosti početních operací (komutativnost, asociativnost, distributivnost); v oboru celých čísel s jistotou pracovat i se zápornými čísly; chápat pojem mocnina s celočíselným exponentem, ovládat základní pravidla pro počítání s mocninami; v oboru reálných čísel umět zobrazit reálná čísla na číselné ose, ovládat pojem interval a jeho zápis, chápat a umět provádět množinové operace sjednocení a průnik s intervaly .*

<u>Klíčová slova kapitoly</u>: ***číselný obor; množina, početní operace, komutativnost, asociativnost, distributivnost, interval, číselný výraz, absolutní hodnota.***



<u>Čas potřebný pro prostudování kapitoly</u>:
2 + 4 hodiny (teorie + řešení příkladů)



<u>Průvodce</u>
Jak už jsem v úvodu napsal, tato kapitola je takovým kondičním tréninkem sportovce. Neuděláme spolu díru do světa matematiky, ale dovednosti zde získané upotřebíte nejen v dalších kapitolách tohoto textu, ale především při dalším studiu matematiky.
Pro mnohé z vás to možná bude jen připomenutí toho, co už dávno znáte používáte. Přesto, čtěte pozorně. Já považuji dovednosti získané v této kapitolem za nezbytné pro jakékoli další čtení matematického textu. Musíte se orientovat v číselných oborech a osvojit si principy základních početních operací.

Každý začátek je lehký!

1.1 Množiny, číselné obory

Množina

Pojem množina je jedním ze základních pojmů moderní matematiky. Intuitivně bychom mohli říci, že **množina** je soubor nebo skupina navzájem různých objektů, kde u každého objektu musí být možné rozhodnout, zda do dané množiny patří, či nikoliv. Množiny zpravidla značíme velikými písmeny, např. A, B, N, R.

Prvky množiny

Jednotlivé objekty, které patří do dané množiny, nazýváme **prvky množiny**. Značí se obvykle malými písmeny, např. a, b, p, x.
Je-li x prvkem množiny A, vyjadřujeme to zápisem $x \in A$, není-li x prvkem množiny A, vyjadřujeme to zápisem $x \notin A$. Je vhodné uvážit též množinu, která neobsahuje žádný prvek. Nazývá se **prázdná množina** a značíme ji symbolem $\emptyset$. Množiny, které obsahují aspoň jeden prvek, se nazývají **neprázdné množiny**. Množina, která má konečný počet prvků se nazývá **konečná množina**. Každá množina, která není konečná, se nazývá **nekonečná množina**.

Množinu můžeme zadat různými způsoby. Časté jsou tyto dva způsoby jejího zadání:
a) **Výčtem prvků**, tj. uvedeme všechny prvky množiny, vyjmenujeme je. Uvedu několik příkladů konečných i nekonečných množin.

$$A = \{1;2;3;4;5\}, \quad B = \{-9;-8;\ldots;-1\}, \quad C = \{c_1;c_2;\ldots;c_n\},$$
$$D = \{0;2;4;6;\ldots\}, \quad E = \{\ldots;-3;-2;-1;0\}, \quad F = \{a_1;a_2;\ldots\}.$$

b) **Charakteristickou vlastností**, tj. takovou vlastností, kterou mají právě jen prvky zadané množiny.
Opět uvedu několik příkladů.
Množina K všech přirozených čísel od 10 do 20.
Množina L všech celých čísel větších než –4 a menších než 8.

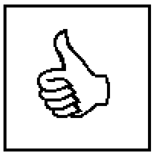
<u>Průvodce</u>
Pro zapsání prvků množiny, která je určena charakteristickou vlastností, si uvědomte, že tuto vlastnost musejí mít jen prvky této množiny. Dávejte si pozor na slovní vazby „větší než“ nebo „větší nebo rovno než“, zda se jedná o čísla přirozená nebo reálná.

V tuto chvíli berte pojmy jako přirozená, celá nebo reálná čísla intuitivně, jak jste je poznali na základní škole. Blíže se k ním dostaneme v dalším odstavci.

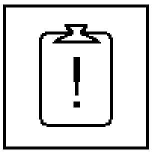
Charakteristickou vlastností jsou rovněž zadány množiny v úloze 1.1 na konci této podkapitoly. Všimněte si zde symbolického zápisu těchto množin.

Příklad
Rozhodněte, zda platí:
a) $4 \in \{2;3;4\}$, b) $5 \notin \{2;3;4\}$, c) $0 \notin \emptyset$.

Návod a řešení.
Všechny případy platí.



Průvodce
Pozor na nesprávný zápis prázdné množiny $\{0\}$. Tento zápis představuje množinu, která obsahuje jediný prvek - nulu.
Dále vás chci upozornit na nesprávný zápis $\{4;8\} \in \{2;4;6;8\}$. Intuitivně jistě vidíme, že prvky 4 a 8 jedné množiny jsou prvky i dané množiny. Množina je však podmnožinou dané množiny a tu skutečnost vyjadřujeme zápisem $\{4;8\} \subset \{2;4;6;8\}$.



Příklad
Rozhodněte, zda platí:
a) $4 \subset \{2;3;4\}$, b) $\{3;5\} \not\subset \{2;3;4\}$, c) $\{a;b;3\} \subset \{a;b;c;2;3;5\}$, d) $\emptyset \subset \{k;l;m\}$,
e) $\{1;2;3\} \subset \{1;2;3\}$.

Návod a řešení.
Nemá smysl; platí; platí; platí (prázdná množina je podmnožinou každé množiny); platí (množina je podmnožinou i sebe sama).

Přirozená čísla

Přistoupím k rozšíření pojmu čísla a uvedu vám klasifikaci čísel do číselných oborů. Pojem čísla se v historii lidstva postupně rozšiřoval. K základním matematickým pojmům patří čísla 1, 2, 3, 4, …, která slouží k vyjádření počtu osob, zvířat, předmětů apod. Matematicky přesně jimi vyjadřujeme počty prvků konečných neprázdných množin. Tento číselný obor nazýváme **přirozená čísla** a značíme N; píšeme $N = \{1;2;\ldots\}$. Přirozená čísla s nulou značíme N_0; píšeme $N_0 = \{0;1;2;\ldots\}$.

Celá čísla

Celá čísla jsou čísla $\ldots;-2;-1;0;1;2;\ldots$, jsou to tedy všechna přirozená čísla (celá kladná čísla), nula a záporná celá čísla (čísla opačná k přirozeným číslům). Množinu celých čísel značíme Z. Celá čísla jsou důležitá pro vyjádření přírůstku, úbytku, vyjadřujeme jimi změny počtu prvků apod.
Množina N se nazývá množina celých kladných čísel, množinu N_0 nazýváme obor nezáporných celých čísel.

Racionální čísla

Racionální čísla $\frac{p}{q}$, kde p je celé číslo a q je přirozené, např. $\frac{1}{2};\frac{-2}{7};5;\frac{123}{11}$ a používáme je k vyjádření počtu celků a jejich dílů apod.
Množinu racionálních čísel značíme Q.

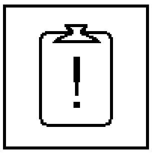
Reálná čísla

Reálná čísla jsou všechna racionální čísla a **čísla iracionální** (např. $\sqrt{2};-\sqrt{5};\sqrt[7]{13};\ldots;\pi;e;\log 2;\sin\frac{\pi}{4};\ldots$). Lze jimi vyjádřit výsledky měření délek, obsahů, objemů apod. Tento číselný obor značíme R.

Tato klasifikace čísel není úplná. Během svého studia středoškolské matematiky poznáte ještě jeden číselný obor, množinu komplexních čísel, kdy k číslům reálným přidáte ještě čísla imaginární. Jak už jejich samotný název napovídá, nejsou to čísla, která by měla oporu v reálných situacích, jako tomu bylo u předcházejících číselných oborů. Slouží mj. k vyjádření odmocniny ze záporného čísla. Tato čísla mají velké uplatnění nejen v matematice, ale i ve fyzice.

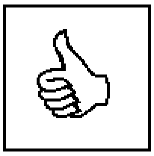
Z hlediska množinového je obor přirozených čísel podmnožinou oboru celých čísel, ten je zase podmnožinou oboru racionálních čísel atd. Symbolikou zapsáno $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Příklad:



Rozhodněte, která z daných čísel
$$7;\ 0{,}8;\ \frac{1}{2};\ -\frac{15}{17};\ \frac{3\pi}{2};\ \sqrt{9};\ \sqrt{11};\ -12;\ \sqrt{18};\ \tan\frac{\pi}{3};\ 2^{10};\ \log 10;\ 0;\ \sin 30°;\ \sin 60°$$
jsou a) přirozená, b) celá, c) racionální, d) iracionální, e) reálná.

Návod a řešení.
Nejprve si přečtěte následujícího průvodce.



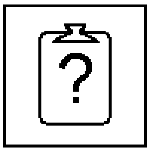
<u>Průvodce</u>
Musíte si uvědomit, co po vás vlastně chci – vybrat čísla z příslušných číselných oborů. U čísla 7 je to jasné (přirozené číslo); číslo 0,8 je potřeba vidět ve tvaru $\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$, ale i tak vidíte, že celé číslo to není. Pak je tady pár zajímavostí jako $\sqrt{9}=3;\log 10=1;\sin 30°=\frac{1}{2}=0{,}5$.

a) $7;\sqrt{9}=3;2^{10};\log 10=1\in N$, b) $7;\sqrt{9};-12;2^{10};\log 10;0\in Z$,

c) $7;\ 0{,}8;\ \frac{1}{2};\ -\frac{15}{17};\ \sqrt{9};\ -12;\ 2^{10};\ \log 10;\ 0;\ \sin 30°=\frac{1}{2}\in Q$,

d) $\frac{3\pi}{2};\ \sqrt{11};\ \sqrt{18};\ \tan\frac{\pi}{3};\ \sin 60°$ jsou iracionální čísla, e) všechna jsou reálná.

Úloha 1.1



1. Jaký je vztah mezi přirozenými čísly a celými čísly?
2. Může být někdy součet nebo součin dvou racionálních čísel číslem iracionálním?

3. Napište množinu všech prvočísel menších než 10. (Prvočíslo je přirozené číslo větší než jedna, které má jako dělitele pouze jedničku a sebe sama.)
4. Napište všechna lichá celá čísla větší než –3 a menší nebo rovna 5.
5. Určete výčtem prvků následující množiny:

$$A = \{x \in N;\ x^2 < 20\}$$
$$B = \{x \in Z;\ x^2 = x\}$$
$$C = \{x \in R;\ x^2 = -4\}.$$

Řešení úlohy naleznete v kapitole 1.5 Řešení úloh.

1.2 Základní aritmetické pojmy

Průvodce
V této části vám vyložím některé základní aritmetické pojmy, jako je rovnost čísel, aritmetické operace a jejich vlastnosti. Důležité z hlediska teorie množin bude zavedení uspořádání reálných čísel.

Rovnost, sčítání a násobení čísel

Rovnost čísel vyjadřujeme zápisem $a = b,$ kde a, b jsou reálná čísla.
Základní početní operace jsou **sčítání čísel** $a, b,$ jim přiřadíme číslo $a + b$ označované jako součet a, b; **násobení čísel** $a, b,$ jim přiřadíme číslo $a \cdot b$ označované jako součin čísel $a, b.$

Odčítání a dělení čísel

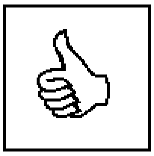
K těmto operacím definujeme inverzní početní operace. **Odčítání čísel** je operace, kterou ke dvěma číslům a, b přiřazujeme číslo x označované jako $a - b,$ zvané rozdíl čísel a, b v tomto pořadí, takové, že platí $b + x = a.$
Dělení čísel je operace, kterou ke dvěma číslům a, b přiřazujeme číslo x označované jako $a : b$, resp. $\frac{a}{b}$, zvané podíl čísel a, b v tomto pořadí, takové, že platí $b \cdot x = a.$

Průvodce
Rovností čísel rozumíme, že symboly a, b představují dvě vyjádření téhož čísla.
Např. $\cos \pi = -1,\ 2 + 3 = 5,\ \log 10 = 1$.

NENÍ DEFINOVÁNO DĚLENÍ NULOU!!!

Proto u výrazů tvaru $a : b$ nebo též $\frac{a}{b}$, kde a, b značí celá čísla, musíme vždy klást podmínku, tedy $b \neq 0$. Toto je jedno ze zásadních pravidel matematiky. Existuje několik příkladů a matematických říkánek, kdy výsledkem je evidentní rozpor s realitou, např. 1=2 apod. Jejich znění najdete na internetu. Často je podstatou takové problémové úlohy dělení výrazem, který může být roven nule, a na jeho podmínku se „zapomene“. Proto znovu opakuji, pamatujte si: „ **Nulou nepodělíš!**“

Průvodce
A nyní vám připomenu základní vlastnosti reálných čísel, které se týkají početních operací a jejich uspořádání. Je potřeba, abyste se tyto pojmy naučili.



Základní věty o vlastnostech operací sčítání a násobení v oboru R.

Pro každá reálná čísla a,b,c platí

$a+b=b+a$ … **komutativnost sčítání**,

$a \cdot b = b \cdot a$ … **komutativnost násobení**,

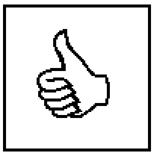
$(a+b)+c=a+(b+c)$ … **asociativnost sčítání**,

$(ab)c=a(bc)$ … **asociativnost násobení**,

$(a+b)c=ac+bc$ …**distributivnost násobení vzhledem k sčítání**.

Průvodce
Komutativnost je zřejmá. Bez problému rozumíte, že 2+3=3+2; stejně jako u násobení platí rovnost $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$.
Asociativnost je jakési přezávorkování výrazu, též sdružování; tedy (4 + 5) + 6 je totéž jako 4 + (5 + 6) a obé je rovno 15. Jinými slovy, můžete si dát dohromady (sdružit) to, co je pro vás výhodnější. Např. (14 + 13) + 7 bude pro někoho lepší počítat jako 14 + (13 + 7) = 14 + 20 = 34.
Distributivnost představuje roznásobení:

$$3 \cdot (4+5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5, \ 2(x+y) = 2x + 2y$$



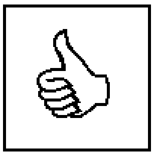
Mezi základní existenční věty v oboru R se řadí tyto čtyři věty:

V oboru R existuje právě jedno číslo **0** takové, že pro každé $x \in R$ platí $x+0=x$.

V oboru R existuje právě jedno číslo **1** takové, že pro každé $x \in R$ platí $x \cdot 1 = x$.

V oboru R existuje k číslu x právě jedno číslo $-x$ takové, že platí $x+(-x)=0$.

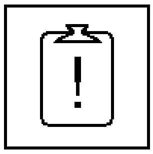
V oboru R existuje k číslu $x \neq 0$ právě jedno číslo $\frac{1}{x}$ takové, že platí $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.



Průvodce

Myslím, že jste tyto tzv. existenční věty intuitivně tušili a nic překvapující to pro vás není. Jen je potřeba pomalu vstřebávat matematickou terminologii, která je velmi přesná. I na tak banální věc, jakou je skutečnost, že 5 + 0 = 5, kterou všichni známe už od prvního stupně základní školy, je potřeba si zvyknout i v podání jazyka matematiky. Čísla 0 a1 mají pro množinu reálných čísel zásadní význam, o kterém se více dozvíte na vysoké škole.

Číslo $-x$ se nazývá číslo opačné k číslu x, číslo $\frac{1}{x}$ se nazývá převrácené číslo k číslu $x \neq 0$.



Příklad

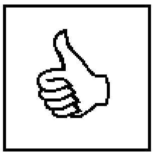
Upravme společně tyto čtyři výrazy:

$-(-a) = a, \qquad -a - b = -(a+b),$

$(-a)b = -ab, \quad (-a)(-b) = ab.$

Jen je třeba si uvědomit postavení znaménka mínus, možná některým z vás pomůže, představíte-li si místo mínus číslo -1.

Pak např. $-a - b = -1 \cdot a + (-1) \cdot b = -1(a+b) = -(a+b).$



Průvodce

Důležitou skutečností je odpověď na následující otázku.

Kdy je součin dvou reálných čísel roven nule?

$ab = 0$?

Návod a řešení. Součin dvou reálných čísel a, b je roven nule, právě když alespoň jedno z čísel a, b je rovno nule.

$ab = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \vee b = 0.$

Toho lze využít při řešení následujících příkladů.

Příklad
Řešte následující rovnice v oboru R:
a) $x(x-3)=0$
b) $(x+4)(x-6)=0$.

Návod a řešení.
Každý z činitelů součinu může být roven nule. Např. v a) je to $x=0$ nebo $x-3=0$, odkud jsou dvě řešení; $x=0; 3$. Podobně v b) $x=-4; 6$.

Příklad
Pro která $x\in R$ je daný podíl roven nule a kdy neexistuje?
a) $\dfrac{x+3}{x-1}$
b) $\dfrac{2x-1}{x+5}$
c) $\dfrac{3x+7}{6-5x}$.

Návod a řešení.
Podíl (zlomek) je roven nule tehdy, když pouze čitatel zlomku je roven nule. a) $x=-3$, b) $x=\dfrac{1}{2}$, c) $x=-\dfrac{7}{3}$.
Podíl (zlomek) nemá smysl tehdy, když jmenovatel zlomku je roven nule.
a) $x=1$, b) $x=-5$, c) $x=\dfrac{6}{5}$.

A nyní k uspořádání reálných čísel. Jak je zavedené a jaké má vlastnosti (uvedu aspoň ty základní).

Uspořádání reálných čísel

Uspořádání reálných čísel je dáno tím, že se v něm kromě vztahu rovnosti zavádějí vztahy nerovnosti:
menší než (znak **<**), **větší než** (znak **>**).

<u>Průvodce</u>
Důležitá vlastnost uspořádání v oboru R je popsána v následující větě:

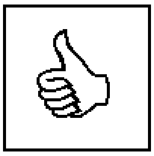
Pro každá čísla $a,b\in R$ **platí právě jeden ze vztahů** $a<b,\ a=b,\ a>b.$

Tato vlastnost uspořádání reálných čísel se nazývá *trichotomie uspořádání*.
A opět, když nad touto vlastností popřemýšlíte, uvědomíte si, že věta je logická. Pro dvě reálná čísla jsou z hlediska uspořádání tři možnosti. Pokud si nejsou sobě rovny, tak buď první je větší než druhé, a nebo obráceně.

Samozřejmě že uspořádání má i další neméně důležité vlastnosti. Např. je zcela jasné, že když 2 < 7 a současně 7 < 9, potom též 2 < 9, tzv.

tranzitivnost. Ale není cílem této opory podat detailní výklad všech vlastností uspořádání reálných čísel.

Průvodce
Přejdu k poslednímu matematickému pojmu v této části. Jeho definice není komplikovaná, přesto působí studentům problémy. Čtěte další řádky tohoto textu zvlášť pozorně!
Zavedeme absolutní hodnotu reálného čísla. Ze základní školy víte, že se značí $|5|, |-13|$ a její výpočet je snadný; $|5| = 5, |-13| = 13$. Nicméně při řešení některých úloh představuje absolutní hodnota studentům komplikace na cestě za řešením.



Nejprve uvedu seriózní definice absolutní hodnoty.

Absolutní hodnota

Absolutní hodnotu reálného čísla a, značí se $|a|$, definujeme takto:

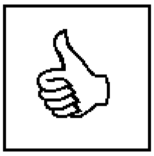
$$|a| = \begin{cases} a & pro\ a \geq 0 \\ -a & pro\ a < 0, \end{cases}$$

tj. absolutní hodnota nezáporného čísla je číslo samo, absolutní hodnota záporného čísla je číslo k němu opačné. Vidíte, že absolutní hodnota reálného čísla je číslo nezáporné, tj. kladné nebo nula.

Podívejme se blíže na geometrický význam absolutní hodnoty reálného čísla.
Na číselné ose představuje $|a|$ vzdálenost obrazu čísla a od počátku.
Vzdálenost obrazů čísel a, b na číselné ose je pak $|a - b|$.

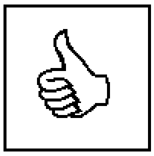
Průvodce
Vzdálenost obrazu čísla 3 na číselné ose od počátku (obraz čísla 0) je roven třem, tj. |3| = 3; vzdálenost obrazu čísla –7 od počátku je 7, tj. |–7| = 7.

Vzdálenost obrazů čísel 17 a 15 je dvě, tj. |17–15| = |15–17| = 2.
Odkud už sami vidíte nejen význam absolutní hodnoty, ale též tu skutečnost, že absolutní hodnota reálného čísla je číslo nezáporné. Vzdálenost nebo-li délka úsečky je vždy vyjádřena nezáporným číslem.



Příklad
Vypočtěte absolutní hodnoty reálných čísel:

$$6;\ -5;\ 0;\ 1{,}23;\ 2\sqrt{3} - 10;\ -\frac{3}{4};\ \frac{11}{12};\ -\sqrt{16};\ \sqrt{2} - \sqrt{3};\ \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$



Průvodce

Než přistoupíte k řešení příkladu, rád bych na tomto místě zdůraznil několik věcí, které plynou z definice absolutní hodnoty.

(1) Absolutní hodnota kladného výrazu a nuly je výraz TENTÝŽ! Např. $|112| = 112,\ \left|\frac{\sqrt{29}}{5}\right| = \frac{\sqrt{29}}{5}.$

Kladným výrazem rozumějte výraz číselný nebo výraz s proměnnou - tyto výrazy přijdou ve druhé kapitole.

(2) Absolutní hodnota záporného výrazu (opět číselného nebo s proměnnou) je výraz k němu OPAČNÝ!

Např. $|-112| = -(-112) = 112,\ \left|-\frac{\sqrt{29}}{5}\right| = -\left(-\frac{\sqrt{29}}{5}\right) = \frac{\sqrt{29}}{5}.$

(3) Pamatujte si, že výsledkem výpočtu absolutní hodnoty musí být vždy KLADNÝ VÝRAZ (číselný nebo s proměnnou), nebo nula.

Odpověď k příkladu.

Z průvodce výše okamžitě píšeme pro kladné číselné výrazy jejich absolutní hodnoty

$$|6| = 6;\quad |0| = 0;\quad |1{,}23| = 1{,}23;$$

$$\left|\frac{11}{12}\right| = \frac{11}{12};\quad \left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right| = \sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

Pro záporné výrazy je to v některých případech zajímavější:

$$|-5| = 5;\quad \left|2\sqrt{3}-10\right| = -\left(2\sqrt{3}-10\right) = 10-2\sqrt{3};$$

$$\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4};\quad \left|-\sqrt{16}\right| = \sqrt{16} = 4;\quad \left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

Jen připomenu věc pro výpočet některých příkladů asi zásadní. U čísel 6; 1,23; -5; $-\sqrt{16}$ o jejich znaménku nepochybujeme. Je zcela zřejmé a pro pořádek uvedu, že první dvě čísla jsou čísla kladná a druhá dvě čísla jsou čísla záporná.

U výrazů typu $\sqrt{2}-\sqrt{3};\ \sqrt{3}-\sqrt{2}$ možná na chvíli znejistíte. Vezměte si kalkulátor a proveďte si přibližné výpočty. Obdržíte následující:

$$\sqrt{2}-\sqrt{3} \doteq 1{,}41-1{,}73=-0{,}32$$
$$\sqrt{3}-\sqrt{2} \doteq 1{,}73-1{,}41=+0{,}32.$$

Zápis bez absolutní hodnoty musí být NEZÁPORNÝ, proto $\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$!

Příklad

Vypočtete.

a) $|-1|+|-3|-|-6|$

b) $|2-5|+|(-0{,}5)(-2)|-|0{,}8(-4)|$

c) $\dfrac{|-10|}{|-4|}-\dfrac{6}{|-2|}+\dfrac{12}{-|-3|}$.

Návod a řešení.

Při řešení takovýchto úloh provádějte jednotlivé úkony – naznačené operace postupně.

a) $|-1|+|-3|-|-6|=1+3-6=-2$

b) $|2-5|+|(-0{,}5)(-2)|-|0{,}8(-4)|=3+1-3{,}2=0{,}8$

c) $\dfrac{|-10|}{|-4|}-\dfrac{6}{|-2|}+\dfrac{12}{-|-3|}=\dfrac{10}{4}-\dfrac{6}{2}-\dfrac{12}{3}=\dfrac{5}{2}-7=-\dfrac{9}{2}$.

Příklad

Dané množiny zapište výčtem prvků.

a) $M_1=\{x\in Z;\ |x|<2\}$

b) $M_2=\{x\in Z;\ |x|\geq 4\}$.

Návod a řešení.

Uvědomte si, že se jedná o celá čísla, jejichž absolutní hodnota splňuje danou nerovnost.

a) $M_1=\{-1;0;1\}$

b) $M_2=\{\ldots;-6;-5;-4;4;5;6;\ldots\}$.

Úloha 1.2

Vypočtěte.

a) $\left|\dfrac{4-|-2|-3}{1+|-5|-8}\right|$

b) $\left|\dfrac{3-|-5|-2}{-2}\right|$.

Řešení naleznete v kapitole 1.5 Řešení úloh.

1.3 Číselné výrazy

<u>Průvodce</u>
V této části vám na několika příkladech připomenu základní pravidla pro počítání. Půjde zatím výhradně o číselné výrazy, tedy výrazy bez proměnné. Je bezpodmínečně nutné oživit si tyto dovednosti, např. umocňování záporných čísel, práce ve zlomku – především krácení, rozepsání smíšených čísel apod. Základním pravidlem pro počítání takovýchto úloh je postupné provádění jednotlivých úprav, například výpočty závorek, rozepsání smíšených čísel, dělení zlomků, krácení ve zlomku atd.
Tato část je přípravou na další kapitolu, kde budete provádět totéž, ale na výrazech s proměnnou.
Nejprve vám připomenu smíšená čísla a práci ve zlomku.

Příklad
Vypočtěte.

a) $$\frac{8\cdot 4\frac{1}{4}-11\frac{1}{5}:9\frac{1}{3}-\left(-2\frac{1}{3}\right):\frac{5}{3}}{14:2\frac{2}{9}+8\frac{2}{5}\cdot 1\frac{2}{7}}$$

b) $$\frac{\frac{1}{6}-\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}-\frac{11}{12}}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right):\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)\right].$$

Návod a řešení.
a) Nejprve rozepíšeme smíšená čísla, odstraníme znaménka mínus a provedeme dělení zlomků.

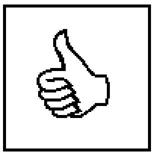
$$\frac{8\cdot 4\frac{1}{4}-11\frac{1}{5}:9\frac{1}{3}-\left(-2\frac{1}{3}\right):\frac{5}{3}}{14:2\frac{2}{9}+8\frac{2}{5}\cdot 1\frac{2}{7}}=\frac{8\cdot\frac{17}{4}-\frac{56}{5}:\frac{28}{3}-\left(-\frac{7}{3}\right):\frac{5}{3}}{14:\frac{20}{9}+\frac{42}{5}\cdot\frac{9}{7}}=\frac{2\cdot\frac{17}{1}-\frac{56}{5}\cdot\frac{3}{28}+\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{5}}{14\cdot\frac{9}{20}+\frac{6}{5}\cdot\frac{9}{1}}=$$

$$=\frac{34-\frac{6}{5}+\frac{7}{5}}{\frac{63}{10}+\frac{54}{5}}=\frac{34+\frac{1}{5}}{\frac{63}{10}+\frac{108}{10}}=\frac{\frac{171}{5}}{\frac{171}{10}}=\frac{171}{5}\cdot\frac{10}{171}=2.$$

b) Nejprve provedeme naznačené operace v závorkách, poté rozepíšeme dělení zlomků.

$$\frac{\frac{1}{6}-\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}-\frac{11}{12}}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right):\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]=\frac{\frac{2}{12}-\frac{9}{12}}{\frac{15}{24}-\frac{22}{24}}\cdot\left[\left(\frac{3}{6}+\frac{5}{6}\right):\left(\frac{8}{12}-\frac{3}{12}\right)\right]=\frac{-\frac{7}{12}}{-\frac{7}{24}}\cdot\left[\frac{8}{6}:\frac{5}{12}\right]=$$

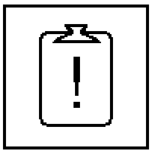
$$=\frac{7}{12}:\frac{7}{24}\cdot\left[\frac{8}{6}\cdot\frac{12}{5}\right]=\frac{7}{12}\cdot\frac{24}{7}\cdot\frac{8}{6}\cdot\frac{12}{5}=2\cdot\frac{16}{5}=\frac{32}{5}=6{,}4.$$



Průvodce
Nyní bude následovat složitější část. Připomenu vám na několika příkladech pravidla pro umocňování. Tuto ani následující pasáž v žádném případě nevynechávejte.
Zvýšenou pozornost věnujte umocňování. Při kladném sudém exponentu se vyruší mínus, naopak při kladném lichém exponentu mínus zůstává.
Při záporných exponentech se umocňování provádí na převráceném čísle.
Tato pravidla lze též nalézt ve školních Matematicko-fyzikálních tabulkách.

$$(-2)^3=(-2)(-2)(-2)=-8,\quad (-2)^4=(-2)(-2)(-2)(-2)=16,$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}=\left(\frac{4}{3}\right)^{2}=\frac{16}{9},\quad (-5)^{-3}=\left(-\frac{1}{5}\right)^{3}=-\frac{1}{125}.$$



Příklad
Vypočtěte.

a) $-3^2-(-3)^3+(-2)^2-2^2$

b) $\left(\frac{10^{-15}\cdot 10^{4}}{10^{-13}}\right)^2$

c) $\left(\frac{9}{12}\right)^0-(-2)^{-2}+\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}-\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}+\left(-\frac{6}{7}\right)^{-2}$

d) $5-4^2+(5-4)^2+5+(-4)^2+5\cdot(-4)^2+(-1)^{56}-29^0$.

Návod a řešení.
Dávejte si pozor, zda mínus je součástí umocňování, či nikoliv. Postupujte pozorně!

a) $-3^2-(-3)^3+(-2)^2-2^2=-9-(-27)+4-4=18$

b) $\left(\frac{10^{-15}\cdot 10^{4}}{10^{-13}}\right)^2=\left(\frac{10^{-11}}{10^{-13}}\right)^2=\left(10^{-11+13}\right)^2=10^{2\cdot 2}=10000$

c) $\left(\frac{9}{12}\right)^0-(-2)^{-2}+\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}-\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}+\left(-\frac{6}{7}\right)^{-2}=$

$$=1-\left(\frac{1}{-2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2-\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{7}{6}\right)^2=1-\frac{1}{4}+\frac{25}{4}-\frac{16}{9}+\frac{49}{36}=$$

$$=7-\frac{15}{36}=7-\frac{5}{12}=6\frac{7}{12}$$

d) $5-4^2+(5-4)^2+5+(-4)^2+5\cdot(-4)^2+(-1)^{56}-29^0=$

$=5-16+1+5+16+5\cdot 16+1-1=91.$

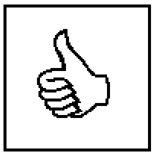
<u>Průvodce</u>

Předposlední část budou tvořit číselné výrazy s odmocninami. Zaměřím se na ukázku typových příkladů. Připomenu vám několik základních pravidel pro práci s odmocninami. Tato a další pravidla naleznete například v Matematicko-fyzikálních tabulkách.

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}\Rightarrow\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab},$

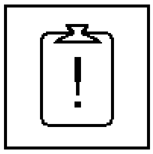
$\sqrt{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[6]{5}\Rightarrow\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a},$

částečné odmocnění $\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=3\sqrt{2}$.



Příklad

Vypočtěte a vyjádřete co nejúsporněji.



a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}+\sqrt{8}:\sqrt{2}$

b) $\sqrt{\frac{4}{10}}\cdot\sqrt{\frac{10}{9}}-\left(\sqrt{2}\right)^{-2}-\left(\sqrt{2}\right)^{-4}$

c) $3\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{9}$.

Návod a řešení.

Při výpočtu těchto příkladů užiji pouze základních pravidel. V příkladu b) je třeba nejdříve odstranit záporné exponenty. Práci se zápornými exponenty jsem vám ukázal v předcházejícím příkladě.

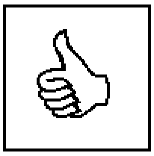
a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}+\sqrt{8}:\sqrt{2}=\sqrt{16}+\sqrt{4}=6$

b) $\sqrt{\frac{4}{10}}\cdot\sqrt{\frac{10}{9}}-\left(\sqrt{2}\right)^{-2}-\left(\sqrt{2}\right)^{-4}=$

$$=\sqrt{\frac{4}{9}}-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{4-6-3}{12}=-\frac{5}{12}$$

V řešení příkladu c) si všimněte zavedení čísla 3 pod třetí odmocninu a následného krácení se jmenovatelem.

c) $3\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{\frac{3^3\cdot 5}{3}}+\sqrt[3]{5\cdot 9}=\sqrt[3]{9\cdot 5}+\sqrt[3]{45}=2\sqrt[3]{45}.$



Průvodce

Nyní vám ukážu speciální úpravu – usměrňování zlomků. Provádí se tehdy, je-li součástí jmenovatele zlomku odmocnina. Cílem této úpravy zlomku je odstranit odmocninu ze jmenovatele.

Například vezměme zlomek $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Úpravu (usměrnění) zlomku provedu následovně:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Podstatou usměrnění zlomku je násobení zlomku vhodně zapsanou jedničkou.

Tedy $\frac{5}{\sqrt{5}}\cdot 1=\frac{5}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}.$

Jak vidíte, rozhodujícím faktorem usměrňování je následující skutečnost, že $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$, $\sqrt{15}\cdot\sqrt{15}=15$, obecně pro kladná a platí $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$.

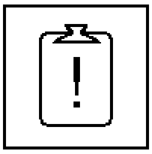
Zajímavější je situace v případě, kdy jmenovatel zlomku je tvořen dvoučlenem. Např. $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$.

V tomto případě využíváme při usměrnění známého vzorce $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Zlomek usměrním následovně:

$$\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}=\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{3-1}=\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}=\sqrt{3}-1.$$

Procvičíte si to na následujícím příkladu.



Příklad

Usměrněte zlomky.

a) $\frac{4}{\sqrt{5}}$

b) $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

c) $\frac{2+\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$

d) $\frac{7-\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$

Návod a řešení.

Jak vidíte, tento příklad nemá žádné komplikace. Všechny jmenovatele zlomků jsou jednočleny, takže rozšiřování zlomků bude jednoduché.

a) $\dfrac{4}{\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

b) $\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{30}}{6} = \dfrac{\sqrt{30}}{2}$

c)

$$\frac{2+\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{36}}{3} = \frac{2\sqrt{3}+6}{3} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{3}+3\right)$$

d) $\dfrac{7-\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{7-\sqrt{7}}{\sqrt{7}} \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{7\sqrt{7}-7}{7} = \sqrt{7}-1.$

Nyní vám ukáži složitější usměrňování, se kterým se v praxi setkáte častěji.

Příklad

Odstraňte odmocninu ze jmenovatele.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}}$

d) $\dfrac{19\sqrt{6}}{5\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$.

Návod a řešení.

U těchto typů příkladů je třeba mít stále na paměti vzoreček $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \dfrac{3\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{3-2} = 3\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

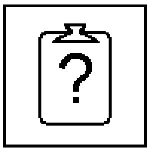
c) $\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}} = \dfrac{1}{7+4\sqrt{3}} \cdot \dfrac{7-4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}} = \dfrac{7-4\sqrt{3}}{49-48} = 7-4\sqrt{3}$

d) $\dfrac{19\sqrt{6}}{5\sqrt{3}-3\sqrt{2}} = \dfrac{19\sqrt{6}}{5\sqrt{3}-3\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\left(5\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)}{5\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \dfrac{19\sqrt{6}\cdot\left(5\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)}{75-18} =$

$= \dfrac{19\sqrt{6}\cdot\left(5\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)}{57} = \dfrac{\sqrt{6}\cdot 5\sqrt{3}+\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{2}}{3} = \dfrac{15\sqrt{2}+6\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{2}+2\sqrt{3}.$

Pro zopakování a upevnění získaných dovedností si propočítejte následující úlohu.

Úloha 1.3



Vypočtěte:

a) $1+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

b) $\left(2\dfrac{4}{9}\right)^2 : 3\dfrac{2}{3}$

c) $\left(\dfrac{5}{6}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^{-6}$.

Řešení naleznete v kapitole 1.5 Řešení úloh.

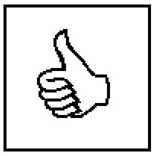
1.3 Intervaly

Průvodce

Stručně lze říci, že intervaly představují libovolné souvislé podmnožiny množiny R a dělí se do dvou skupin na omezené a neomezené. Jejich využití je například v rychlém a přehledném zápisu řešení rovnic s parametrem, při řešení nerovnic nebo při zápisu podmínek řešitelnosti úlohy.

Práce s intervaly je velmi jednoduchá. Zásadou je, zda krajní mez intervalu patří, nebo nepatří do dané množiny.

Jistě vidíte rozdíl: a) $x > 5$, b) $x \geq 5$. Bez ohledu na to, v jakém číselném oboru máme řešit obě nerovnice, je vidět, že v případě a) číslo 5 není součástí řešení nerovnice, ale v případě b) už ano.



Intervaly

Intervaly jsou takové podmnožiny množiny všech reálných čísel, které je možné na číselné ose graficky znázornit jako úsečku, polopřímku nebo přímku, přičemž krajní body úsečky a počáteční bod polopřímky k ní mohou, ale nemusí patřit.

Klasifikace intervalů je následující:

omezené, které lze na číselné ose graficky znázornit úsečkou;
neomezené, které jsou na číselné ose znázorněny polopřímkou, resp. přímkou.

Druhy omezených intervalů

Název intervalu	Symbolické značení	Příklad zápisu
Interval uzavřený	$\langle a;b\rangle = \{x\in R; a\le x\le b\}$	$\langle -2;7\rangle$
Intervaly polouzavřené (polootevřené)	$(a;b\rangle = \{x\in R; a< x\le b\}$	$(5{,}1;12\rangle$
	$\langle a;b) = \{x\in R; a\le x< b\}$	$\langle 6;9)$
Interval otevřený	$(a;b) = \{x\in R; a< x< b\}$	(-3;-0,9)

Druhy neomezených intervalů

Název intervalu	Symbolické značení	Příklad zápisu
Intervaly neomezené zprava	$\langle a;+\infty) = \{x\in R; x\ge a\}$	$\langle -5;+\infty)$
	$(a;+\infty) = \{x\in R; x> a\}$	$(2;+\infty)$
Intervaly neomezené zleva	$(-\infty;a\rangle = \{x\in R; x\le a\}$	$(-\infty;6\rangle$
	$(-\infty;a) = \{x\in R; x< a\}$	$\left(-\infty;\frac{3}{4}\right)$
Interval oboustranně neomezený	$(-\infty;+\infty) = R$	

Výše uvedené pojmy vám teď ukáži na několika příkladech.

Příklad
Určete charakteristické vlastnosti těchto intervalů.
a) $(-2;2)$
b) $\langle -5;12\rangle$
c) $(-\infty;3{,}8\rangle$
d) $(\sqrt{2};\infty)$.

Návod a řešení.
Základem jsou hraniční body intervalu a skutečnost, zda do něj tyto krajní body patří, či nikoli.
a) $-2< x<2$, b) $-5\le x\le 12$, c) $x\le 3{,}8$, d) $x>\sqrt{2}$.

Průvodce

V některých úlohách se objevuje požadavek na grafické znázornění intervalu na číselné ose.

Tento úkol provedete následovně:

- na číselné ose vyznačíte krajní body intervalu (pokud to je možné)
- vyznačíte, zda krajní meze intervalu do něj patří, či nikoli
- zakreslíte příslušnou úsečku, polopřímku či přímku.

Krajní mez v případě neomezeného intervalu (nekonečno) se samozřejmě nevyznačuje – polopřímka, přímka.

V případě, že krajní bod intervalu do něj patří, vyznačíte v tomto bodě plné kolečko, v opačném případě, kdy krajní mez intervalu do něj nepatří, vyznačíte prázdné kolečko.

Procvičíte si to na následujícím příkladě.

Příklad

Určete, které intervaly, resp. sjednocení intervalů, představují množiny.

a) $\{x \in R;\ x \geq 1\}$

b) $\left\{x \in R;\ |x| < \frac{3}{5}\right\}$

c) $\{x \in R;\ |x| \geq 2\}$

d) $\{x \in Z;\ -3 < x \leq 7\}$

e) $\left\{x \in R;\ -\frac{1}{2} < x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Návod a řešení.

Především vám, kteří máte k matematice přeci jen trochu dále, doporučuji, abyste si dané množiny vyznačili na číselné ose spolu s mezemi intervalu; plným kolečkem vyznačte krajní bod, který patří do dané množiny, prázdným kolečkem vyznačte krajní bod, který do dané množiny nepatří.

a) polopřímka s krajním bodem 1

b) úsečka bez obou krajních bodů

c) dvě polopřímky s krajními body –2 a 2

d) tuto množinu nelze zapsat jako interval a ani znázornit jako souvislou množinu (úsečku), graficky (na číselné ose) tato množina představuje množinu izolovaných bodů –2, –1, …, 6, 7

e) úsečka bez levého krajního bodu $-\frac{1}{2}$ a s pravým krajním bodem $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

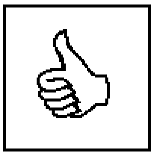
Zápisy množin pomocí intervalů jsou následující.

a) $\langle 1; \infty)$

b) $\left(-\frac{3}{5}; \frac{3}{5}\right)$

c) $\left(-\infty;-2\right\rangle \cup \left\langle 2;\infty\right)$

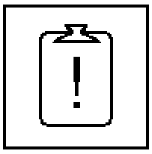
e) $\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



Průvodce

Práce s intervaly je velmi příjemná. Zápis je rychlý a přehledný. Častou chybou ale je, že se zamění úhlová závorka za kulatou, tedy to, zda meze intervalu do dané množiny patří, nebo nepatří. Práci s intervaly si procvičíte na následujícím příkladu. Doporučuji vám: zakreslete si příslušné intervaly na jednu číselnou osu a proveďte příslušný úkon.

Protože intervaly jsou množiny, můžeme určovat sjednocení nebo průnik intervalů. Obojí má pro nás zásadní význam například při řešení rovnic s absolutní hodnotou nebo soustav nerovnic.



Příklad

Zjednodušte zápis pro intervaly $I_1 = \left\langle -4;1\right\rangle$, $I_2 = \left\langle 0;2\right)$.

a) $I_1 \cup I_2$

b) $I_1 \cap I_2$

c) $I_1 - I_2$

d) $I_2 - I_1$

Návod a řešení.

Zakreslete příslušné intervaly na číselnou osu, vyznačte příslušnost krajních bodů k příslušným množinám. Jen vám připomenu význam jednotlivých operací.

Sjednocení intervalů (a) je interval – množina – všech reálných čísel, která patří alespoň do jednoho intervalu.

Průnikem intervalů (b) je množina všech reálných čísel, která patří zároveň do všech daných intervalů.

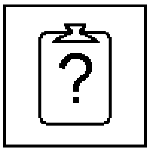
Rozdíl intervalů (c) $I_1 - I_2$ je množina všech reálných čísel, která patří do intervalu I_1 a zároveň nepatří do intervalu I_2.

a) $I_1 \cup I_2 = \left\langle -4;1\right\rangle \cup \left\langle 0;2\right) = \left\langle -4;2\right)$

b) $I_1 \cap I_2 = \left\langle -4;1\right\rangle \cap \left\langle 0;2\right) = \left\langle 0;1\right\rangle$

c) $I_1 - I_2 = \left\langle -4;1\right\rangle - \left\langle 0;2\right) = \left\langle -4;0\right)$

d) $I_2 - I_1 = \left\langle 0;2\right) - \left\langle -4;1\right\rangle = \left(1;2\right)$



Úloha 1.4

Jsou dány intervaly $A = \left\langle -6;0\right\rangle$, $B = \left(-4;2\right\rangle$, $C = \left\langle 1;4\right\rangle$. Určete:

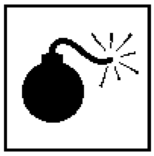
a) sjednocení a průnik všech dvojic intervalů

b) sjednocení a průnik všech tří intervalů

c) všechny možné rozdíly dvojic intervalů.

Řešení naleznete v následující podkapitole Řešení úloh.

Shrnutí kapitoly Základní poznatky.



V této kapitole jsem vám předložil základní poznatky a dovednosti,bez kterých není možné studovat další partie matematiky.

Východiskem je orientace v číselných oborech.
Jsou to přirozená čísla $N = \{1;2;\ldots\}$; celá čísla $Z = \{\ldots;-2;-1;0;1;2;\ldots\}$; racionální čísla $Q = \left\{\frac{p}{q};\ p \in Z, q \in N\right\}$ a čísla reálná R.

Je nezbytné mít přehled o vlastnostech aritmetických operací.
Pro všechna reálná čísla a,b,c platí:

$a + b = b + a$ … komutativnost sčítání,
$a \cdot b = b \cdot a$ … komutativnost násobení,
$(a + b) + c = a + (b + c)$ … asociativnost sčítání,
$(ab)c = a(bc)$ … asociativnost násobení,
$(a + b)c = ac + bc$ …distributivnost násobení vzhledem k sčítání.

Zásadní význam má pojem absolutní hodnoty, značí se $|a|$ a zavedli jsme ho následujícím způsobem:

$$|a| = \begin{cases} a & pro\ a \ge 0 \\ -a & pro\ a < 0. \end{cases}$$

Dále jsem vám ukázal několik příkladů na číselné výrazy, kde se vyskytovala jednak absolutní hodnota, ale také jste prováděli umocňování a odmocňování.
Na připomenutí uvádím nejdůležitější pravidla:

$$(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27, \quad (-1)^4 = (-1)(-1)(-1)(-1) = 1,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}, \quad (a)^{-3} = \left(\frac{1}{a}\right)^3 = \frac{1}{a^3},$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad \sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a}\ ,$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}.$$

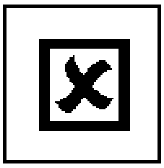
Posledním pojmem kapitoly byl interval, jakási souvislá podmnožina množiny reálných čísel. Stručný přehled všech možných intervalů je v následující tabulce.

Název intervalu	Symbolické značení
Interval uzavřený	$\langle a;b\rangle = \{x\in R; a\le x\le b\}$
Intervaly polouzavřené (polootevřené)	$(a;b\rangle = \{x\in R; a< x\le b\}$
	$\langle a;b) = \{x\in R; a\le x< b\}$
Interval otevřený	$(a;b) = \{x\in R; a< x< b\}$
Intervaly neomezené zprava	$\langle a;+\infty) = \{x\in R; x\ge a\}$
	$(a;+\infty) = \{x\in R; x> a\}$
Intervaly neomezené zleva	$(-\infty;a\rangle = \{x\in R; x\le a\}$
	$(-\infty;a) = \{x\in R; x< a\}$
Interval oboustranně neomezený	$(-\infty;+\infty) = R$

1.5 Řešení úloh

V závěrečné části první kapitoly naleznete řešení všech úloh z této části, v některých případech je řešení doplněno i stručným postupem.

Řešení úlohy 1.1

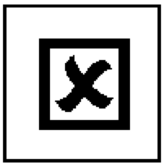


1. Přirozená čísla jsou podmnožinou množiny celých čísel.
2. Součtem nebo součin dvou racionálních čísel je vždy číslo racionální. Výsledkem operace může být v některých případech číslo celé nebo přirozené (např. viz níže), ale nemůže jím být nikdy číslo iracionální.

$$\frac{4}{3}+\frac{5}{3}=\frac{9}{3}=3,\quad -\frac{5}{7}\cdot\frac{14}{5}=-2,\quad \frac{-6}{13}\cdot\left(-\frac{39}{2}\right)=9$$

3. $P=\{2;3;5;7\}$.
4. $L=\{-1;1;3;5\}$.
5.
   $A=\{1;2;3;4\}$
   $B=\{0;1\}$
   $C=\emptyset$.

Řešení úlohy 1.2



a) $\left|\dfrac{4-|-2|-3}{1+|-5|-8}\right| = \left|\dfrac{4-2-3}{1+5-8}\right| = \left|\dfrac{-1}{-2}\right| = \dfrac{1}{2}$

b) $\left|\dfrac{3-|-5|-2}{-2}\right| = \left|\dfrac{3-5-2}{-2}\right| = \left|\dfrac{-4}{-2}\right| = 2..$

Řešení úlohy 1.3

a) $1+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 1+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 1+\dfrac{2-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3}{4-3} = 1-1+\sqrt{3} = \sqrt{3}$

b) $\left(2\dfrac{4}{9}\right)^2 : 3\dfrac{2}{3} = \left(\dfrac{22}{9}\right)^2 : \dfrac{11}{3} = \dfrac{22\cdot 22}{9\cdot 9}\cdot\dfrac{3}{11} = \dfrac{22\cdot 2}{9\cdot 3} = \dfrac{44}{27} = 1\dfrac{17}{27}$

c) $\left(\dfrac{5}{6}\right)^5\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^{-6} = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{5+(-6)} = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{-1} = \left(\dfrac{6}{5}\right)^1 = \dfrac{6}{5} = 1\dfrac{1}{5}.$

Řešení úlohy 1.4

a)

$A\cup B = \langle -6;2\rangle,\ A\cap B = (-4;0\rangle$

$B\cup C = (-4;4\rangle,\ B\cap C = \langle 1;2\rangle$

$A\cup C = \langle -6;0\rangle \cup \langle 1;4\rangle,\ A\cap C = \emptyset.$

b) $A\cup B\cup C = \langle -6;4\rangle,\quad A\cap B\cap C = \emptyset.$

c)

$A-B = \langle -6;4\rangle,\ B-A = (0;2\rangle$

$B-C = (-4;1),\ C-B = (2;4\rangle$

$A-C = \langle -6;0\rangle,\ C-A = \langle 1;4\rangle.$

2. Algebraické výrazy

V této kapitole se dozvíte: co to je mnohočlen, jak sčítáme, odčítáme, násobíme a dělíme mnohočleny, pravidla pro umocňování dvojčlenu. Dozvíte se jak upravit výraz na součin a jaké má tato úprava využití, ale též jak se stanovují podmínky pro algebraické výrazy.

V této kapitole se naučíte: *na konkrétních příkladech mnohočlenů s jednou proměnnou umět aplikovat pojmy: člen, koeficient, stupeň mnohočlenu; budete umět mnohočleny sčítat, odčítat, násobit a v jednodušších případech i dělit; ovládat zpaměti vzorce pro druhou a třetí mocninu dvojčlenu; umět rozkládat mnohočleny vytýkáním nebo užitím vzorců; stanovovat podmínky pro platnost algebraických výrazů v různých případech (definiční obory).*

Klíčová slova kapitoly: mnohočlen; *podmínka výrazu; ekvivalentní úpravy výrazu; definiční obor; racionální lomený algebraický výraz; iracionální algebraický výraz.*

Čas potřebný pro prostudování kapitoly:
1 + 8 hodin (teorie + řešení příkladů)

Průvodce
Matematický zápis (výraz), jimž vyjadřujeme početní výkony (operace) s čísly a pořadí, ve kterém mají být provedeny, nazýváme početní výrazy.
V minulé kapitole jsme používali převážně zápis skládající se výhradně z čísel (tzv. číselné výrazy).
Nyní budeme užívat matematické zápisy skládající se z čísel a z písmen označujících číselné proměnné (tzv. algebraické výrazy). Algebraický výraz obsahuje popřípadě také závorky určující pořadí naznačených operací.

Výrazy jsou například zápisy $x^2+2x+1;\ \dfrac{x+y}{2};\ -5;\ \dfrac{(a+2)b}{a^2+b^2};\ \sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$.

Algebraický výraz je matematický zápis, ve kterém početní výrazy obsahují číselné proměnné, a vyjadřuje základní početní výkony, příp. k nim inverzní početní výkony, umocňování, resp. odmocňování.

Algebraický výrazy

Algebraické výrazy se dělí na **racionální algebraické výrazy**, jež neobsahují odmocniny, a **iracionální algebraické výrazy**, které odmocniny obsahují.

Příklady racionálních algebraických výrazů:

$$3a+b^3;\ \frac{2x+3}{5+6x^2};\ x+\frac{x^2-1}{3};\quad a,b,x\in R.$$

Příklady iracionálních algebraických výrazů:

$$3\sqrt{a}-b^2;\ \frac{\sqrt{x-1}}{x};\ \sqrt{a}+\sqrt{b};\quad a,b\geq 0, x\geq 1.$$

Definiční obor

Definičním oborem proměnných algebraického výrazu rozumíme množinu všech takových hodnot proměnných, pro které má algebraický výraz smysl (je definován).

Vezměte si lomený výraz $\frac{1}{x+2}, x\in R$. Vidíte, že pro x = -2 výraz není možné vyčíslit. Tedy podmínkou výrazu (definičním oborem výrazu) je $x\in R, x\neq -2$, též $x\in R-\{-2\}$ nebo jen stručně $x\neq -2$.

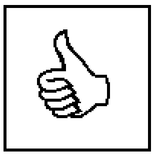
Úprava výrazu

Úpravou algebraického výrazu V_1 (zjednodušením) rozumíme jeho vyjádření jiným (jednodušším) algebraickým výrazem V_2, pro který za podmínek, kdy mají provedené úpravy smysl, platí: $V_2 = V_1$.
Nejčastěji používané úpravy jsou krácení výrazu a uvedení na společného jmenovatele. Samozřejmě že úprav výrazů je více, ale tyto úpravy budete využívat nejvíce a při řešení příkladu přinášejí největší efekt. Zjednodušeným výrazem je například výraz s menším počtem členů, závorek, proměnných apod.
Ukázka:

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1,\quad x\neq 1$$

$$a-\frac{a^2-b^2}{a}=\frac{a^2-a^2+b^2}{a}=\frac{b^2}{a},\quad a\neq 0$$

K těmto typům úloh se podrobněji dostaneme až ve třetí kapitole.



<u>Průvodce</u>
Chtěl bych vám připomenout pojem mnohočlen a základní pravidla pro počítání s ním. V dalších částech kapitoly už to bude těžší. Algebraické výrazy budou složitější, postupy mnohdy komplikované. Od vás budou tyto úlohy vyžadovat komplexní přístup – správně vyhodnotit situaci a použít „správnou“ (rozumějte efektivní) metodu. V mnohém budeme opakovat předcházející kapitolu, neboť početní výkony (operace) s mnohočleny vycházejí z pravidel pro počítání s reálnými čísly, jako jsou komutativnost, asociativnost operací sčítání i násobení, distributivnost násobení vzhledem ke sčítání.
Zásady pro celou kapitolu jsou v podstatě dvě:

NESČÍTÁME HRUŠKY A JABLKA (dohromady)**!**
NULOU NEPODĚLÍŠ!

První zásadu vám ozřejmím v podkapitole 2.1 – Početní operace, druhou v následující pasáži 2.2 – Podmínky výrazů. Přestože mnohým z vás bude připadat úvod jednoduchý, nepodceňujte jej!

2.1 *Počítání s mnohočleny*

Mnohočlenem (polynomem) jedné proměnné x ($x \in R$) se nazývá výraz, který lze napsat ve tvaru

Mnohočlen

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 ,$$

kde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ jsou reálná čísla zvaná **koeficienty mnohočlenu**. Je-li $a_n \neq 0$, pak číslo n se nazývá **stupeň mnohočlenu**. **Jednočlenem** nazýváme součin určitého čísla a mocnin jedné nebo více proměnných s přirozeným mocnitelem.

Např. $xy;\ \frac{1}{2}b^4;\ \frac{\sqrt{3}}{2}a^3b^2c$.

<u>Průvodce</u>
Příklady mnohočlenů:

$$x^2 - 2x + 1;\quad b^4;\quad 2a - \frac{1}{2};\quad x\sqrt{2};\quad a^4b^3 + 4ab - 5a .$$

Stručně vám terminologii vysvětlím takto:

- koeficienty jsou čísla u příslušné proměnné (v prvním mnohočlenu 1,-2,1, ve druhém 1 atd.);
- stupeň mnohočlenu poznáte podle nejvyšší mocniny proměnné (v prvním mnohočlenu je stupeň 2; ve druhém 4; ve čtvrtém 1, v pátém 7 (nejvyšší součet mocnitelů).
- počet členů mnohočlenu je dán počtem jednočlenů, tedy z motivačního příkladu výše jsou to trojčlen, jednočlen, dvojčlen, jednočlen a trojčlen.

Příklad
Pro dané mnohočleny

$$P(x) = x^3 - 2x + 6,\quad Q(x) = 3x^5 + 7x^2 - 1,\quad R(x,y) = 3x^2y + 2xy^3 - 5xy + 6y - 1$$

a) určete stupeň mnohočlenů,
b) vypočtěte hodnoty mnohočlenů $P(-2), Q(-1), R(1;-1)$.

Návod a řešení.
a) Stupně mnohočlenů určíme podle nejvyšší mocniny příslušné proměnné.
st $P(x) = 3$, st $Q(x) = 5$, st $R(x,y) = 1 + 3 = 4$
b) Hodnoty mnohočlenů obdržíte po dosazení za příslušné proměnné.

$$P(-2) = (-2)^3 - 2(-2) + 6 = -8 + 4 + 6 = 2$$

$$Q(x) = 3(-1)^5 + 7(-1)^2 - 1 = -3 + 7 - 1 = 3$$

$$R(1,-1) = 3 \cdot 1^2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot (-1)^3 - 5 \cdot 1 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1) - 1 = -3 - 2 + 5 - 6 - 1 = -7$$

<u>Průvodce</u>

Jak už jsem v předcházející části napsal, početní výkony s mnohočleny plynou z početních operací s čísly. Budete se řídit následujícími pravidly:

1) Sčítání mnohočlenů – sčítáte jednotlivé členy mnohočlenů

$$3a+5b-2a+b=a+6b\,.$$

2) Násobení mnohočlenu provedete takto:

a) jednočlenem – násobíte jím každý člen mnohočlenu a vzniklé součiny sečtete

$$4ab(a+b^2)=4a^2b+4ab^3\,.$$

b) mnohočlenem – násobíte postupně každý člen jednoho mnohočlenu každým členem druhého mnohočlenu a vzniklé součiny sečtete

$$(a-2b+1)(3a+b)=3a^2+ab-6ab-2b^2+3a+b=$$

$$=3a^2-5ab-2b^2+3a+b\,.$$

3) Dělení mnohočlenu provádíte obdobně jako dělení přirozených čísel zapsaných v desítkové soustavě

a) jednočlenem

$$(3x^4+6x^2y+3xy+9x):3x=x^3+2xy+y+3$$

b) mnohočlenem

$$(2y^3+5y^2+8y+3):(2y+1)=y^2+2y+3,\quad y\neq-\frac{1}{2}.$$

$$\underline{-(2y^3+y^2)}$$

$$4y^2+8y$$

$$\underline{-(4y^2+2y)}$$

$$6y+3$$

$$\underline{-(6y+3)}$$

$$0$$

Operace s mnohočleny

Příklad

Sečtěte jednočleny.

a) $7x^2-4x+2-2x^2-7$

b) $5ab-4a^2b^2-8ab^2+3ab-ab^2-4a^2b^2$.

Návod a řešení.

Mějte stále na paměti, že sečíst můžeme pouze sobě odpovídající členy. Nelze sečíst dohromady jablka a hrušky!

a) $7x^2-4x+2-2x^2-7=5x^2-4x-5$

b) $5ab-4a^2b^2-8ab^2+3ab-ab^2-4a^2b^2=8ab-9ab^2-8a^2b^2$.

Příklad

Sečtěte mnohočleny.

a) $(x^2+2x)-(y^2+2y)+(x+2xy+y)-(2x^2-3y^2+7)$

b) $\{8x-[-(2y+4y)+6x]\}+4x$

c) $2(2a-b)-\{(a+b)+2(a-b)-[(5a-1)-(b-2)]\}$.

Návod a řešení.

<u>Průvodce</u>
Platí stejná pravidla jako v předcházejícím příkladě, leč přibývají problémy se závorkami a mínusy. Jak postupovat? Nejprve si udělejte „pořádek“ v závorkách (pokud je co sečíst, tak to sečtu), poté odstraňte závorky.

POZOR na mínus před závorkou!
Typický příklad často se vyskytující chyby:

$2-(x+y)=2-x+y$ je CHYBNÉ

$2-(x+y)=2-x-y$ je SPRÁVNĚ!

a) $(x^2+2x)-(y^2+2y)+(x+2xy+y)-(2x^2-3y^2+7)=$
$=x^2+2x-y^2-2y+x+2xy+y-2x^2+3y^2-7=$
$=-x^2+2y^2+3x-y-7$

b) $\{8x-[-(2y+4y)+6x]\}+4x=12x-[-2y-4y+6x]=12x-[-6y+6x]=$
$=12x+6y-6x=6x+6y=6(x+y)$

c) $2(2a-b)-\{(a+b)+2(a-b)-[(5a-1)-(b-2)]\}=$
$=4a-2b-\{a+b+2a-2b-[5a-b+1]\}=4a-2b-\{3a-b-5a+b-1\}=$
$=4a-2b-(-2a-1)=4a-2b+2a+1=6a-2b+1$.

Příklad
Vynásobte a sečtěte.
a) $3x(x+y)+5y(x-y)$
b) $rs(2r+3s+1)-r(2rs+3)-(2r+rs^2)$.

Návod a řešení.
Nejprve roznásobím a poté příslušné jednočleny sečtu.
a) $3x(x+y)+5y(x-y)=3x^2+3xy+5xy-5y^2=3x^2+8xy-5y^2$
b) $rs(2r+3s+1)-r(2rs+3)-(2r+rs^2)=2r^2s+3rs^2+rs-2r^2s-3r-2r-rs^2=$
$=2rs^2+rs-5r$.

Příklad
Vynásobte mnohočleny.
a) $ay(2a-y)-\{a^3-[y^2(a-3y)-a^2(a+2y)]\}$
b) $(2a+b)(a-1)$
c) $(1+5x)(5-4x)$.

Návod a řešení.
Příklad (a) řešte jako v předcházejícím příkladě, je jen mírně složitější. Příklady v (b), (c) představují typické násobení dvojčlenů a provedete je jako násobení „každý člen s každým".

a) $ay(2a-y)-\{a^3-[y^2(a-3y)-a^2(a+2y)]\}=$
$=2a^2y-ay^2-\{a^3-[ay^2-3y^3-a^3-2a^2y]\}=2a^2y-ay^2-\{a^3-ay^2+3y^3+a^3+2a^2y\}=$
$=2a^2y-ay^2-\{2a^3-ay^2+3y^3+2a^2y\}=2a^2y-ay^2-2a^3+ay^2-3y^3-2a^2y=$
$=-2a^3-3y^3=-(2a^3+3y^3)$

b) $(2a+b)(a-1)=2a^2-2a+ab-b$

c) $(1+5x)(5-4x)=5-4x+25x-20x^2=5+21x-20x^2$.

Příklad
Vynásobte mnohočleny.
a) $(x^2-5x+2)(x-4)$
b) $(a^2+3ab-b^2)(2a-b)$.

Návod a řešení.
a) $(x^2-5x+2)(x-4)=x^3-4x^2-5x^2+20x+2x-8=x^3-9x^2+22x-8$
b) $(a^2+3ab-b^2)(2a-b)=2a^3-a^2b+6a^2b-3ab^2-2ab^2+b^3=$
$=2a^3+4a^2b-4ab^2+b^3$.

<u>Průvodce</u>
Při takovémto roznásobení mnohočlenů je kontrola velmi obtížná – je nutné vše znovu celé přepočítat. Chyby, které se zpravidla při této operaci dělají, jsou spíše ve smyslu nechtěného vynechání některých součinů. Minimální kontrolou je spočítání členů vzniklého součinu. V našem příkladě máte trojčlen krát dvojčlen, tj. 3x2=6, tedy rozepsaný součin bude mít šest členů.
Například součin $(x^3-x^2y^2+xy^3+3y^4)(x^2y^3-2xy-y^2)$ bude po rozepsání obsahovat 12 členů.

Příklad
Dělte.
a) $d^{10}:(-d^8)$
b) $20m^4n^3:5m^2n^3$
c) $16x^3y^2:(-4x^2y)$

Návod a řešení.
Rady a komentář jsou v následujícím průvodci.

Průvodce
U dělení můžeme uplatnit několik algebraických postupů. Výběr záleží na vás, ale pokusím se vás na některé zvlášť přehledné nebo efektivní upozornit. Nevím, jak máte rádi zlomky, ale zrovna v tomto případě se jeví jako názorné a pohodlné. Dělení přepíšu do zlomku a ve zlomku krátím.

Dělení výrazů

Např. $x^4y^2:\left(-2x^3y^3\right)=\dfrac{x^4y^2}{-2x^3y^3}=-\dfrac{x}{2y},\quad x,y\neq 0$.

Jen připomínám dvě pravidla:
- při násobení exponenty sčítejte
- při dělení je odčítejte.

Např. $\dfrac{x^3\cdot x^5}{x^6}=\dfrac{x^{3+5}}{x^6}=x^{8-6}=x^2,\quad \dfrac{x^2\cdot x\cdot\left(x^3\right)^2}{\left(x^2\right)^4}=\dfrac{x^{2+1+6}}{x^8}=x^{9-8}=x$.

a) $d^{10}:\left(-d^8\right)=\dfrac{d^{10}}{-d^8}=-d^2,\quad d\neq 0$

b) $20m^4n^3:5m^2n^3=\dfrac{20m^4n^3}{5m^2n^3}=4m^2,\quad m,n\neq 0$

c) $16x^3y^2:\left(-4x^2y\right)=\dfrac{16x^3y^2}{-4x^2y}=-4xy,\quad x,y\neq 0$.

Příklad
Dělte mnohočlen jednočlenem.
a) $\left(5x^2+2x\right):x$
b) $\left(9xy^2-15x^3y^4\right):\left(-3xy^2\right)$
c) $\left(18p^4q^3-27p^3q^2\right):9p^2q$.

Návod a řešení.

Průvodce
Postup je analogický, každý člen mnohočlenu postupně dělíte jednočlenem - dělitelem. Dělení provádějte pomalu, nejprve si vydělte koeficienty u příslušného členu, potom dělte jednotlivé proměnné. Výsledky zapište a pokrčujte v dělení dalšího člena mnohočlenu.

I zde můžete použít rozepsání dělení do zlomků, ale myslím si, že tento zápis již není tak výhodný jako v předcházejících typech příkladů.

a) $\left(5x^2+2x\right):x=5x+2,\quad x\neq 0$
b) $\left(9xy^2-15x^3y^4\right):\left(-3xy^2\right)=-9+5x^2y^2,\quad x,y\neq 0$
c) $\left(18p^4q^3-27p^3q^2\right):9p^2q=2p^2q^2-3pq,\quad p,q\neq 0$.

Příklad
Dělte mnohočlen dvojčlenem.
a) $\left(m^2-2m-15\right):\left(m-5\right)$
b) $\left(-15+9a+3a^3-5a^2\right):\left(3a-5\right)$
c) $\left(m^4-m^3n+m^2n^2-mn^3\right):\left(m^2+n^2\right)$

Návod a řešení.
Před samotným dělením si pozorně přečtěte následujícího průvodce.

<u>Průvodce</u>
Jak už jsem výše napsal a uvedl vám na příkladech, dělíte podobně, jako dělíte přirozená čísla. Jistě si ze základní školy vzpomínáte na tzv. dělení pod sebe, např. 1 234 : 123 = 10 (zb. 4)

$$\begin{array}{l} 1\,234 : 123 = 10 \\ \underline{-123} \\ 4 \end{array}$$

Postup při dělení mnohočlenů je analogický. Viz. průvodce v úvodu této podkapitoly.
Dále vás chci upozornit na zadání příkladu (b). Toto zadání je nezbytné upravit a to následovně - seřaďte sestupně jednotlivé členy dělence i dělitele. Seřazení můžete provést dvojím způsobem, a to sestupně, nebo vzestupně. Sestupné seřazení je jen mým doporučením.

Nejdříve jednodušší část, dělení beze zbytku.

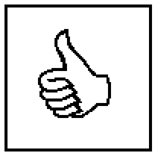
a)
$$\begin{array}{l} \left(m^2-2m-15\right):\left(m-5\right)=m+3, \quad m\neq 5 \\ \underline{-(m^2-5m)} \\ \qquad 3m-15 \\ \qquad \underline{-(3m-15)} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

b) $\left(-15+9a+3a^3-5a^2\right):\left(3a-5\right)=$
$$\begin{array}{l} =\left(3a^3-5a^2+9a-15\right):\left(3a-5\right)=a^2+3, \quad a\neq \frac{5}{3} \\ \underline{-(3a^3-5a^2)} \\ \qquad 0 \;+\; 9a-15 \\ \qquad\quad \underline{-(9a-15)} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{l}
\left(m^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3\right) : \left(m^2 + n^2\right) = m^2 - mn, \quad m \cdot n \neq 0 \\
\underline{-(m^4 + m^2n^2)} \\
\qquad -m^3n \quad -mn^3 \\
\qquad \underline{-(-m^3n - mn^3)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Pozor na tvar podmínky; současně proměnné m, n nesmí být rovny nule.



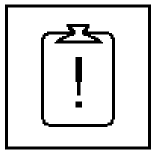
<u>Průvodce</u>
Poslední typ příkladů na dělení je dělení se zbytkem. Postup při řešení je zcela analogický předcházejícím postupům s jediným rozdílem; v posledním kroku zůstane zbytek – mnohočlen menšího stupně, než je dělitel. Při zápisu zbytku máme určitý postup, který ukážu na příkladu dělení přirozených čísel. Vedle zápisu v závorce je nutné, abyste poznali úplný zápis podílu se zbytkem. V čitateli zlomku je zbytek, ve jmenovateli dělitel.

$$17:7 = 2\,(zb.\,3) = \frac{14+3}{7} = 2 + \frac{3}{7}, \quad 24:5 = 4\,(zb.\,4) = 4 + \frac{4}{5},$$

$$77:12 = 6(zb.5) = 6 + \frac{5}{12}$$

Tento postup vám nyní ukážu na dělení mnohočlenů.

Příklad



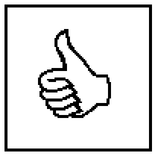
Dělte mnohočleny, zbytek zapište.

a) $\left(x^3 + 2x^2 - 6\right) : (x + 3)$

b) $\left(2x^3 + 7x^2 + 8x + 7\right) : (x + 2)$

c) $\left(3v^3 - 17v^2 + 21v - 43\right) : \left(v^2 - 8v + 15\right)$.

Návod a řešení.



<u>Průvodce</u>
Budu opakovat již zažitý postup, tedy výsledek (včetně zbytku) zapíšu způsobem, který jsem ukázal v předcházejícím průvodci.

Při výpočtu nezapomeňte na to, že dělitel nesmí být roven nule. Blíže se k podmínkám dostaneme až v následující podkapitole, přesto si myslím, že tyto snadné podmínky zvládnete bez problémů. Dělitele položte rovno nule a příslušné kořeny vypočítejte.

a)

$$\left(x^3+2x^2-6\right):(x+3)=x^2-x+3-\frac{15}{x+3},\quad x\neq-3$$

$$\underline{-(x^3+3x^2)}$$

$$-x^2-6$$

$$\underline{-(-x^2-3x)}$$

$$3x-6$$

$$\underline{-(3x+9)}$$

$$-15$$

b)

$$\left(2x^3+7x^2+8x+7\right):(x+2)=2x^2+3x+2+\frac{3}{x+2},\quad x\neq-2$$

$$\underline{-(2x^3+4x^2)}$$

$$3x^2+8x$$

$$\underline{-(3x^2+6x)}$$

$$2x+7$$

$$\underline{-(2x+4)}$$

$$3$$

c)

$$\left(3v^3-17v^2+21v-43\right):\left(v^2-8v+15\right)=3v+7+\frac{32v-148}{v^2-8v+15},\quad v^2-8v+15\neq0\Rightarrow$$

$$\underline{-(3v^3-24v^2+45v)} \qquad \Rightarrow v\neq 3;5$$

$$7v^2-24v-43$$

$$\underline{-(7v^2-56v+105)}$$

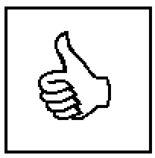
$$32v-148$$

Průvodce

Všimněte si, že v posledním kroku zůstal dvojčlen $32v-148$. Jeho stupeň je menší než stupeň dělitele $v^2-8v+15$, a tudíž dál nemůžeme dělit.
Částečný podíl je $3v+7$ a zbytek je $32v-148$. Všimněte si, že zbytek nemusí být nutně mnohočlen nultého stupně, tj. konstanta, ale též mnohočlen stupně vyššího než nula.

Podstatné je však to, že dělení ukončíte v okamžiku, kdy má dělenec dílčího kroku stupeň menší než dělitel!

O správnosti se můžete přesvědčit stejně jako u čísel tím, že k součinu dělitele a podílu přičtete zbytek, čímž dostanete dělence.
Skutečně platí $\left(v^2-8v+15\right)\cdot\left(3v+7\right)+32v-148=3v^3-17v^2+21v-43$.
Zkoušku u předcházejících příkladů si můžete provést sami. Budete ji mít jako malé kondiční cvičení.



<u>Průvodce</u>

V některých situacích nemusíte nutně používat výše uvedený algoritmus. Vystačíte si se znalostí jednoho ze základních vzorců

$$\left(a^2-b^2\right)=(a+b)(a-b)\,.$$

Například $\left(p^2-36\right):(p+6)=\dfrac{(p+6)(p-6)}{p+6}=p-6\,.$

Příklad

Dělte užitím vzorce pro rozdíl druhých mocnin.

a) $\left(1-4x^2\right):(1-2x)$

b) $\left(16a^2-9b^2\right):(3b+4a)$

c) $\left(1-9c^2\right):(3c+1)$

Návod a řešení.

Při výpočtu použijte rozklad dělence podle vzorce $\left(a^2-b^2\right)=(a+b)(a-b)$, nezapomeňte na podmínky.

a) $\left(1-4x^2\right):(1-2x)=\left[(1-2x)(1+2x)\right]:(1-2x)=1-2x,\quad x\neq\dfrac{1}{2}$

b) $\left(16a^2-9b^2\right):(3b+4a)=\left[(4a+3b)(4a-3b)\right]:(4a+3b)=4a-3b,$

$$4a+3b\neq 0\Rightarrow a\neq-\frac{3}{4}b$$

c) $\left(1-9c^2\right):(3c+1)=\left[(1+3c)(1-3c)\right]:(1+3c)=1-3c,\quad c\neq-\dfrac{1}{3}\,.$

<u>Průvodce</u>

Jedno cvičení jako bonus. Nebude to nic těžkého a navíc získané zkušenosti užijeme při vlastních úpravách algebraických výrazů. Stále mějte na paměti vzorec $\left(a^2-b^2\right)=(a+b)(a-b)$. Představte si, že příklad může vypadat i následovně: $\left(p^2-36\right):(6-p)$. Možná někteří z vás bez velkého zaváhání začnou s úpravou $\left(p^2-36\right):(6-p)=\dfrac{(p+6)(p-6)}{6-p}$. Na první pohled vidíte, že krátit nemůžete, neboť závorky jsou sice podobné, ale nejsou stejné. Další úprava bude spočívat ve vytknutí –1 buď z čitatele nebo ze jmenovatele.

Ukázka:

$$\frac{(p+6)(p-6)}{6-p}=\frac{(p+6)(p-6)}{-(p-6)}=-(p+6),\quad p\neq 6\,.$$

Příklad

Dělte.

a) $(a^2-1):(1-a)$

b) $\left(\frac{4}{9}-25z^2\right):\left(5z-\frac{2}{3}\right)$

c) $(x^3-1):(1-x)$

Návod a řešení.

Pozorně upravte závorky vytknutím –1.

a) $(a^2-1):(1-a)=[(a-1)(a+1)]:[-(a-1)]=-(a+1),\quad a\neq 1$

b) $\left(\frac{4}{9}-25z^2\right):\left(5z-\frac{2}{3}\right)=\left[\left(\frac{2}{3}-5z\right)\left(\frac{2}{3}+5z\right)\right]:\left[-\left(\frac{2}{3}-5z\right)\right]=-\left(\frac{2}{3}+5z\right),\quad z\neq\frac{2}{15}$

c) $(x^3-1):(1-x)=[(x-1)(x^2+x+1)]:[-(x-1)]=-(x^2+x+1),\quad x\neq 1.$

Průvodce

A nyní se společně podíváme na umocňování.

Umocňování jednočlenu je jednoduché. Řídí se pravidlem $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$, tedy například $(a^2)^4=a^8$.

Umocnění dvojčlenu se řídí známými vzorci

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$, resp. $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$.

Umocnění výrazu

V případě, že si nebudete jisti použitím vzorečku, můžete provést umocnění roznásobením. Podívejte se na následující příklad.

$$(x-2y)^3=(x-2y)(x-2y)(x-2y)=(x^2-2xy-2xy+4y^2)(x-2y)=$$
$$=(x^2-4xy+4y^2)(x-2y)=(x^3-2x^2y-4x^2y+8xy^2+4xy^2-8y^3)=$$
$$=(x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3).$$

Jak vidíte, je to daleko zdlouhavější a časově náročnější. A při písemných pracích zpravidla moc času nazbyt nebývá, takže je lépe se vzorečky naučit nebo si založit příslušnou stránku v tabulkách.

Ještě vás chci upozornit na chybu, se kterou se velmi často setkávám. Je to chyba při umocňování dvojčlenu.

Rozhodně NEPLATÍ: $(a+b)^2=a^2+b^2$! Např. $(3+4)^2=7^2=49\neq 25=3^2+4^2$

Takže příště máte dvě možnosti. Buď vzoreček $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, nebo roznásobení závorek $(a+b)^2=(a+b)(a+b)\cdots$.

Příklad
Umocněte
a) $(x+10)^2$
b) $(5ab-c)^2$
c) $(m^2+n^2)^2$
d) $\left(2a-\frac{1}{2}\right)^2$

Návod a řešení.
Použijte vzorečky z předcházejícího průvodce. Pozor na znaménka mínus a ve cvičení (d) obzvlášť opatrnost na spoustu dvojek, zejména v prostředním členu.
a) $(x+10)^2 = x^2+20x+100$
b) $(5ab-c)^2 = 25a^2b^2-10abc+c^2$
c) $(m^2+n^2)^2 = m^4+2m^2n^2+n^4$
d) $\left(2a-\frac{1}{2}\right)^2 = 4a^2-4a+\frac{1}{4}$.

Příklad
Umocněte.
a) $(x+2)^3$
b) $(2a-3b)^3$
c) $(x^2-y^2)^3$
d) $\left(4x^3+\frac{5}{3}y^2\right)^3$

Návod a řešení.
Použijeme vztahy pro umocnění dvojčlenu na třetí. Jednotlivé členy si v případě potřeby rozepište.
a) $(x+2)^3 = x^3+3\cdot 2x^2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3 = x^3+6x^2+12x+8$
b) $(2a-3b)^3 = (2a)^3-3\cdot(2a)^2b+3\cdot 2a\cdot(3b)^2-(3b)^3 = 8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$
c) $(x^2-y^2)^3 = x^6-3x^4y^2+3x^2y^4-y^6$
d) $\left(4x^3+\frac{5}{3}y^2\right)^3 = (4x^3)^3+3\cdot(4x^3)^2\cdot\frac{5}{3}y^2+3\cdot 4x^3\cdot\left(\frac{5}{3}y^2\right)^2+\left(\frac{5}{3}y^2\right)^3 =$
$= 64x^9+90x^6y^2+\frac{100}{3}x^3y^4+\frac{125}{9}y^6$.

Průvodce
Pro snadnější pochopení Vám rozepíši některé členy z příkladu d).
Druhý člen dle vzorce: $3a^2b = 3\cdot(4x^3)^2\cdot\frac{5}{3}y^2 = 16x^6\cdot 5y^2 = 90x^6y^2$.
Další člen vznikl takto: $3ab^2 = 3\cdot 4x^3\cdot\left(\frac{5}{3}y^2\right)^2 = \frac{4\cdot 25}{3}x^3y^4 = \frac{100}{3}x^3y^4$.

2.2 Rozklad mnohočlenů pomocí vytýkání a vzorců

Průvodce

Rozkladem mnohočlenu v součin nazveme jeho vyjádření ve tvaru součinu několika jednodušších mnohočlenů, mnohočlenů nižšího stupně. Potřebu rozkladu výrazu v součin vám ukážu především při úpravách výrazů, ale první náznaky jste viděli u dělení mnohočlenů. Například $\frac{4x^2-9y^2}{2x-3y}=\frac{(2x+3y)(2x-3y)}{2x-3y}=2x+3y,\quad x\neq\frac{3}{2}y$. Zde jsem použil rozklad čitatele podle vzorce, ale je možné i jiný příklad, tzv. vytýkáním. $\frac{ax+ay}{x+y}=\frac{a(x+y)}{x+y}=a,\quad x\neq -y$.

Možnost rozkladu mnohočlenu v součin závisí na číselném oboru, ve kterém jej budete provádět. Většinou to však bude v oboru reálných čísel.

Rozklad výrazu

Průvodce

Seznámím vás s těmito základními způsoby rozkladu mnohočlenu v součin:

a) **vytknutí společného činitele před závorku**, tj. v podstatě užijete distributivnost násobení vzhledem ke sčítání,
například $3ax^2+6bx^2=3x^2(a+2b)$;

b) **užitím vzorců** $\left(a^n\pm b^n\right)=(a\pm b)\left(a^{n-1}\mp a^{n-2}b+\cdots\pm ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$, přičemž uvedený vzorce platí pro každé $n>1$ v případě $\left(a^n-b^n\right)$ a pro každé liché $n>1$ v případě $\left(a^n+b^n\right)$.

Tento obecný vzorec vám rozepíši pro $n=2,3$. Tyto případy se vyskytují nejčastěji a pro úspěšné zvládnutí nejen této opory jsou dostačující.

$$\left(a^2-b^2\right)=(a-b)(a+b)$$
$$\left(a^3\pm b^3\right)=(a\pm b)\left(a^2\mp ab+b^2\right)$$

c) **rozkladem kvadratického trojčlenu na součin lineárních dvojčlenů** (kořenových činitelů), a to buď zpaměti, nebo za použití vzorců pro kořeny příslušné kvadratické rovnice.

Vše vám teď ukážu na příkladech.

Příklad

Rozložte v součin vytknutím.

a) $10m^2n-15mn^2$

b) $4ax-8ax^2+12ax^3$

c) $8(x-4)+(x-4)-3x+12$.

Návod a řešení.
Podstatou vytýkání před závorku je nalezení společného činitele. Zkoušku správnosti si můžete provést sami zpětným roznásobením. Pozor na případ závorky v příkladu (c); je nutné vytknout číslo –3 z dvojčlenu $-3x+12$.

a) $10m^2n-15mn^2=5mn(2m-3n)$

b) $4ax-8ax^2+12ax^3=4ax\left(1-2x+3x^2\right)$

c) $8(x-4)+(x-4)-3x+12=8(x-4)+(x-4)-3(x-4)=$
$=(x-4)(8+1-3)=6(x-4)$.

Příklad
Rozložte v součin s užitím vzorců.

a) $81a^2b^2-1$

b) a^6b^6-1

c) $25a^2-(a+b)^2$.

Návod a řešení.
V tomto případě užijte vzorců
$\left(a^2-b^2\right)=(a-b)(a+b)$ a $\left(a^3\pm b^3\right)=(a\pm b)\left(a^2\mp ab+b^2\right)$.

a) $81a^2b^2-1=(9ab-1)(9ab+1)$

b) $a^6b^6-1=\left(a^3b^3-1\right)\left(a^3b^3+1\right)=(ab-1)\left(a^2b^2+ab+1\right)(ab+1)\left(a^2b^2-ab+1\right)$

c) $25a^2-(a+b)^2=(5a+a+b)(5a-a-b)=(6a+b)(4a-b)$.

<u>Průvodce</u>
Poslední způsob rozkladu mnohočlenu v součin je rozkladem kvadratického trojčlenu. Obecný kvadratický trojčlen je výraz ax^2+bx+c, kde a,b,c jsou reálné koeficienty. Člen ax^2 se nazývá kvadratický, člen bx se nazývá lineární a konstanta c je absolutní člen. Řešení kvadratické rovnice není úkolem této opory, proto vám ukáži rozklady jen takových kvadratických trojčlenů, u kterých vše lze provést zpaměti.
Například $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, kde čísla 2 a 3 jsou kořeny kvadratické rovnice $x^2-5x+6=0$.

Příklad
Rozložte v součin kvadratické trojčleny.

a) x^2-x-6

b) $x^2+7x+12$

c) $x^2-8x+15$.

Návod a řešení.
V této fázi jde o rozklad zpaměti. Hledáte vhodnou kombinaci výrazů $(x-\alpha)(x-\beta)$. Vždy si proveďte zkoušky správnosti!

a) $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$

b) $x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$

c) $x^2-8x+15=(x-5)(x-3)$.

Následující úlohy si vypočítejte jako kondiční cvičení. Upevníte si nabyté dovednosti. Řešení úloh naleznete v kapitole 2.4

Úloha 2.1
Upravte.

a) $\left(2a^2-3b-1\right)\left(-4ab\right)$

b) $\left(1-x^2+2x^3\right)\left(x+1\right)$.

Úloha 2.2
Upravte a v případě nutnosti zapište podmínky.

a) $\left(2x+7y\right)^2$

b) $\left(2a-b\right)^3$

c) $\left(27x^3-8\right):(3x-2)$

d) $\left(5a^2-11a+2\right):(2-a)$.

Úloha 2.3
Rozložte v součin.

a) $b^2-4bc+4c^2$

b) a^3+3a^2+3a+9

c) x^2-2x-8

d) $x(a-1)-y(1-a)$.

2.3 Podmínky algebraických výrazů

Průvodce
V úlohách na úpravy algebraických výrazů je nutné VŽDY určit podmínky, za nichž mají dané výrazy a prováděné úpravy smysl! Zatím jsem vám ukázal jednoduché podmínky při dělení mnohočlenů. Hlavní úkol vás čeká ve třetí kapitole, při vlastních úpravách výrazů. Uvědomte si, že podmínky je nutné stanovit vždy, i když se to v zadání takové úlohy výslovně nežádá. Absence této podmínky je považována za chybu. Hlavním problémem při stanovení podmínky platnosti výrazu a úprav (definičního oboru) je její úplnost. Podmínky stanovujte u zadaného výrazu i v průběhu jeho úprav. Pouze pro zestručnění zápisů budu v opoře všechny tyto podmínky uvádět souhrnně až za výsledným upraveným výrazem. Ale to až v další kapitole.

Podmínka výrazu

V několika příkladech vám ukáži typové úlohy, se kterými se můžete setkat.

Příklad

Určete definiční obor výrazů.

a) $\dfrac{x+8}{3x}$

b) $\dfrac{x}{3x-9}$

c) $\dfrac{2x-6}{x^2-3x}$

d) $\dfrac{5x}{x^2+5x}$.

Návod a řešení.

Uvědomte si, že jsou zadané lomené výrazy. Jmenovatel musí být nenulový.

a) $3x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

b) $3x-9 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

c) $x^2-3x \neq 0 \Rightarrow x(x-3) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0;3$

d) $x^2+5x \neq 0 \Rightarrow x(x+5) \neq 0 \Rightarrow x \neq -5;0$.

Příklad

Určete definiční obor.

a) $\dfrac{3x+6}{x^2-4}$

b) $\dfrac{x-4}{x^2-8x+16}$

c) $\dfrac{2x}{x^3+5x^2+6x}$

d) $\dfrac{x+5}{x^2+25}$

e) $\dfrac{3x-2}{|x|-7}$.

Návod a řešení.

a) $x^2-4 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq \pm 2$

b) $x^2-8x+16 \neq 0 \Rightarrow (x-4)^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$

c) $x\left(x^2+5x+6\right) \neq 0 \Rightarrow x(x+2)(x+3) \neq 0 \Rightarrow x \neq -3;-2;0$

d) $x^2+25 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq -25$, což je splněno pro všechna reálná čísla

e) $|x|-7 \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 7 \Rightarrow x \neq \pm 7$.

Průvodce
Vážnější situace nastane v případě iracionálních algebraických výrazů. Uvědomte si, že nelze v oboru reálných čísel odmocnit záporné číslo.
Tedy podmínka pro výraz $\sqrt{a}$ je, že a musí být nezáporné, tj. $a \geq 0$.
Dále pro výraz $\dfrac{1-x}{\sqrt{x}-3}$ platí, že $x \geq 0 \wedge x \neq 9 \;\Rightarrow x \in \langle 0;9) \cup (9;+\infty)$.

Příklad
Určete definiční obor výrazu.

a) $\sqrt{x+3}$; $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$

b) $\sqrt{2-x}$; $\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$

c) $\sqrt{x^2-1}$; $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

d) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}+3}$; $\dfrac{2}{4-\sqrt{x+1}}$.

Návod a řešení.
a) $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$; $x+3>0 \Rightarrow x>-3$
b) $2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$; $2-x>0 \Rightarrow x<2$
c) situace je obdobná, výraz x^2-1 musí být nezáporný, tj. $x^2-1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1$, ale sledujte další krok řešení - odmocnění: $|x| \geq 1 \Rightarrow x \in (-\infty;-1\rangle \cup \langle 1;+\infty)$;
$x^2-1>0 \Rightarrow x^2>1$, odkud $|x|>1 \Rightarrow x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$
d) $x^2+1 \geq 0 \Rightarrow x^2>-1$, tj. podmínka není nutná a dále $\sqrt{x^2+1}+3=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt{x^2+1}=-3$, což samozřejmě není možné, takže závěrem konstatuji, že přestože se jedná o lomený výraz s odmocninou, podmínka není nutná, tj. $x \in R$.
Rovněž druhý výraz budu zkoumat ve dvou fázích:

- $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$
- $\sqrt{x+1}=4 \Rightarrow x=15$.

Definiční obor výrazu je $x \in \langle -1;15) \cup (15;+\infty)$.

Úloha 2.4
Udejte podmínky.

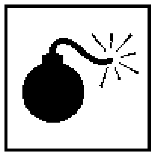
a) $\dfrac{k^2+k}{kx-ky}$

b) $\dfrac{a^3-8b^3}{a-2b}$

c) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$.

Návod a řešení naleznete v kapitole 2.4.

Shrnutí kapitoly Algebraické výrazy



V této kapitole jste poznali jeden ze základních matematických objektů - mnohočlen (polynom) jedné proměnné x ($x \in R$), který lze zapsat ve tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 ,$$

kde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ jsou reálná čísla, zvaná koeficienty mnohočlenu. Je-li $a_n \neq 0$, pak číslo n se nazývá stupeň mnohočlenu.

Ukázka mnohočlenů

stupně nula: $5; \sqrt{2}; \dfrac{-\sqrt{17}}{3}$

stupně jedna: $5x; \dfrac{x}{3} - 0{,}4$

stupně dva: $-x^2; 3x^2 + 2x - 1$ apod.

Poznali jste operace s mnohočleny a rozumíte jejich základním principům. Tady je jejich souhrn.

1) Sčítání mnohočlenů

$$3b - 5a + 2b - 1 - 4a + 2 = 5b - 9a + 1 .$$

2) Násobení mnohočlenů:

a) jednočlenem

$$3ab(a - 2b^3) = 3a^2b - 6ab^4 ,$$

b) mnohočlenem

$$(x - 3y + 2)(3x - 2y) = 3x^2 - 2xy - 9xy + 6y^2 + 6x - 4y = .$$

$$= 3x^2 - 11xy + 6y^2 + 6x - 4y .$$

3) Dělení mnohočlenu

a) jednočlenem

$$(4x^4 - 8x^2y + 4xy - 12x) : (-4x) = -x^3 + 2xy - y + 3$$

b) mnohočlenem (beze zbytku)

$$(9x^4+26x^2+25):(3x^2-2x+5)=3x^2+2x+5,\quad 3x^2-2x+5\neq -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-(9x^4-6x^3+15x^2)}\\
\qquad 6x^3+11x^2+25\\
\qquad \underline{-(6x^3-4x^2+10x)}\\
\qquad\qquad 15x^2-10x+25\\
\qquad\qquad \underline{-(15x^2-10x+25)}\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

c) mnohočlenem (se zbytkem)

$$(10x^3+7x^2-3x-1):(2x+1)=5x^2+x-2+\frac{1}{2x+1},\quad x\neq -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-(10x^3+5x^2)}\\
\qquad 2x^2-3x\\
\qquad \underline{-(2x^2+x)}\\
\qquad\qquad -4x-1\\
\qquad\qquad \underline{-(-4x-2)}\\
\qquad\qquad\qquad 1
\end{array}$$

4) Umocňování

a) jednočlenu $\left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n}$

$$\left(2a^2\right)^4=16a^8,$$

b) dvojčlenu $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$, $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

$$\left(x-2y^2\right)^2=x^2-4y^2+4y^4$$

$$(2a-3b)^3=8a^3-36a^2b+54ab^2-b^3.$$

5) Rozklad mnohočlenu v součin v těchto variantách:

a) vytknutí společného činitele před závorku,

$$4ax^2+8bx^2-12x^3=4x^2(a+2b-3x),$$

b) užitím vzorců

$$\left(a^n+b^n\right)=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}\right),\ n\geq 3 \text{ liché}$$

$$\left(a^n+b^n\right)=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1}\right),\ n\geq 2 \text{ sudé}$$

$$\left(a^n-b^n\right)=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right),\ n\geq 2,$$

speciálně pro $n=2,3$

$$\left(a^2-b^2\right)=(a-b)(a+b),\quad \left(a^3\pm b^3\right)=(a\pm b)\left(a^2\mp ab+b^2\right)$$

$$\left(x^5+32\right)=\left(x^5+2^5\right)=(x+2)\left(x^4-2x^3+4x^2-8x+16\right)$$

$$\left(x^4-81\right)=\left(x^4-3^4\right)=(x-3)\left(x^3+3x^2+9x+27\right),$$

c) rozkladem kvadratického trojčlenu na součin lineárních dvojčlenů

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

$$x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$$

$$x^2 + 11x + 30 = (x+5)(x+6)\,.$$

Pro lomené výrazy jste se naučili stanovovat podmínky

$$\frac{2+x}{2x-3} \Rightarrow x \neq \frac{3}{2}, \quad \frac{7x}{x^2-9} \Rightarrow x \neq \pm 3, \quad \frac{7x}{x^2+5} \Rightarrow x \in R\,.$$

2.4 Řešení úloh

Řešení úlohy 2.1

Roznásobíte.

a) $\left(2a^2 - 3b - 1\right)\left(-4ab\right) = -8a^3b + 12ab^2 + 4ab$

b) $\left(1 - x^2 + 2x^3\right)\left(x+1\right) = x - x^3 + 2x^4 + 1 - x^2 + 2x^3 = 2x^4 + x^3 - x^2 + x + 1\,.$

Řešení úlohy 2.2

Užijte vzorců pro umocnění dvojčlenu.

a) $\left(2x + 7y\right)^2 = 4x^2 + 28xy + 49y^2$

b) $\left(2a - b\right)^3 = 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3\,.$

c) $\left(27x^3 - 8\right) : (3x-2) = \left[(3x-2)(9x^2 + 6x + 4)\right] : (3x-2) = (9x^2 + 6x + 4), \quad x \neq \dfrac{2}{3}$

d) Jedna z možností je provést klasické dělení.

$$\left(5a^2 - 11a + 2\right) : (2-a) = \left(5a^2 - 11a + 2\right) : (-a+2) = -5a + 1$$

$$\begin{array}{l} \underline{-(5a^2 - 10a)} \\ \qquad -a + 2 \\ \qquad \underline{-(-a+2)} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Řešení úlohy 2.3

Provedu

a) rozložení dle vzorce pro umocnění dvojčlenu $b^2 - 4bc + 4c^2 = (b - 2c)^2$

b) vytýkání po částech, vytknutí společné závorky

$$a^3 + 3a^2 + 3a + 9 = a^2(a+3) + 3(a+3) = (a+3)\left(a^2 + 3\right)$$

c) rozklad kvadratického trojčlenu $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$

d) úprava vytknutím –1 a opět vytknutí společné závorky

$$x(a-1) - y(1-a) = x(a-1) + y(a-1) = (a-1)(x+y)\,.$$

Řešení úlohy 2.4

Postup je analogický jako v předcházející úloze, ve jmenovateli je však více proměnných. Úpravu jmenovatele jsem vám naznačil.

a) $k(x-y) \neq 0 \Rightarrow k \neq 0; x \neq y$

b) $a-2b \neq 0 \Rightarrow a \neq 2b$

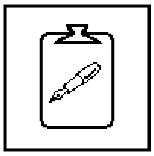
c) $x^2 - y^2 \neq 0 \Rightarrow (x+y)(x-y) \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm y$.

3 Úpravy algebraických výrazů

<u>V této kapitole se dozvíte</u>: *základní typy úprav racionálních a iracionálních výrazů včetně stanovení definičního oboru výrazu.*

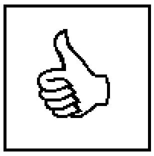
<u>V této kapitole se naučíte</u>: *sčítat, odčítat, násobit a dělit mnohočleny a lomené výrazy, uvádět výrazy na společný jmenovatel, krátit lomený výraz, řešit složitější příklady se závorkami a složenými zlomky*

<u>Klíčová slova kapitoly</u>: lomený výraz; *podmínka výrazu; ekvivalentní úpravy výrazu; racionální lomený algebraický výraz; iracionální algebraický výraz.*



<u>Čas potřebný pro prostudování kapitoly</u>*:*

1 + 8 hodin (teorie + řešení příkladů)



<u>Průvodce</u>

Tato kapitola je závěrečnou částí této opory a ukáži vám v ní některé složitější úpravy algebraických výrazů. Z časové rozvahy vidíte, že mnoho teorie vás tady nečeká, spíše je tato kapitola takovým praktickým cvičením. A právě propočítání několika příkladů vám umožní zvládnout tuto část algebraických úloh. Samotná tato kapitola nestačí. Pro dokonalé pochopení a zvládnutí mnoha potřebných dovedností při úpravách algebraických výrazů je nezbytné, abyste se poohlédli i po další literatuře. Vystačíte si se sbírkou úloh, například [2]. Některé příklady z této sbírky jsem vám v opoře vyřešil, spousta jich ale zbyla pro vaše domácí cvičení.

Kapitolu jsem rozdělil na tři části, především podle typu algebraických výrazů a potřebných stylů úprav.

3.1 Úpravy racionálních algebraických výrazů

Průvodce
Co rozumíme pod pojmem racionální lomený výraz? Jsou to výrazy zapsané jako podíl dvou mnohočlenů. Z jednodušších je to například výraz $\dfrac{5ab}{7x^2+6y^2}$, složitější příklad už může vypadat takto $\dfrac{b}{a+b}-\dfrac{a}{a-b}$. Pravidla nebo postupy seřazené dle důležitosti či použitelnosti vám tady nepředložím. Přesto vám několik rad pro snadnější pochopení cíle těchto matematický úloh dám.
Hlavním vašim úkolem je výraz zjednodušit a zapsat jeho definiční obor. Při zjednodušování používáme všechny možné úpravy, se kterými jsem vás seznámil v předcházející kapitole. Nejde dopředu seřadit úpravy, které budete potřebovat. V některých úlohách se obejdete bez umocňování, jinde bez vytýkání apod.
V části 3.1 se budete setkávat výhradně s výrazy bez odmocnin.

Racionální výraz

Příklad
Upravte.

a) $\dfrac{2}{a}-\dfrac{1-a}{a^2}$

b) $\dfrac{2a}{7x^2y}+\dfrac{3b}{4xy^2}$

c) $\dfrac{3+2x}{2-x}-\dfrac{2-3x}{2+x}+\dfrac{x(16-x)}{x^2-4}$.

Návod a řešení.

Průvodce
Zjednodušení (úprava) zde spočívá v součtu jednotlivých výrazů, základem bude tedy nalezení společného jmenovatele – a to pro další použití nejmenšího.

Ne vždy je to součin jmenovatelů!

Například $\dfrac{1}{6}+\dfrac{3}{8}$ můžeme jistě převést na společného jmenovatele 48, ale po krátkém rozmyšlení vidíme, že společný jmenovatel může být i číslo 24, tedy číslo menší. Méně se při sčítání „zapotíme“.

a) $\dfrac{2}{a}-\dfrac{1-a}{a^2}=\dfrac{2a}{a^2}-\dfrac{1-a}{a^2}=\dfrac{2a-(1-a)}{a^2}=\dfrac{3a-1}{a^2},\quad a\neq 0$

b) $\dfrac{2a}{7x^2y}+\dfrac{3b}{4xy^2}=\dfrac{8ay}{28x^2y^2}+\dfrac{21bx}{28x^2y^2}=\dfrac{8ay+21bx}{28x^2y^2},\quad x,y\neq 0$

Příklad c) je typickým příkladem, ve kterém velká část studentů vytvoří společného jmenovatele zbytečně velkého nebo si nedá pozor na znaménko mínus před závorkou.

c) $\frac{3+2x}{2-x}-\frac{2-3x}{2+x}+\frac{x(16-x)}{x^2-4}=\frac{3+2x}{-(x-2)}-\frac{2-3x}{2+x}+\frac{x(16-x)}{(x-2)(x+2)}=$

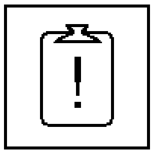
$$=-\frac{(3+2x)(x+2)}{(x-2)(x+2)}-\frac{(2-3x)(x-2)}{(x+2)(x-2)}+\frac{x(16-x)}{(x-2)(x+2)}=-\frac{2x^2+7x++}{x^2-4}-\frac{-3x^2+8x-4}{x^2-4}+$$

$$+\frac{16x-x^2}{x^2-4}=\frac{-2x^2-7x-6+3x^2-8x+4+16x-x^2}{x^2-4}=\frac{x+2}{x^2-4}=\frac{x+2}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{x-2},$$

$x \neq \pm 2$.

Příklad

Upravte.



a) $\frac{x^2-4y^2}{x^2-xy}\cdot\frac{x-y}{x^2+2xy}$

b) $\frac{a^3-8}{a^2+5a-14}\cdot\frac{a^2-49}{2a^2+4a+8}$

c) $\frac{c+d}{c-d}:\frac{c^2+cd}{c^2-d^2}$

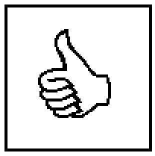
d) $\frac{2x^2-2x+2}{x^2-25}:\frac{x^3+1}{x^2-4x-5}$.

Návod a řešení.

Průvodce

Rozložit čitatele i jmenovatele na součin (lépe uvidíte jejich složky), vyřešit dělení (násobit výrazem převráceným) a pak krátit.

Nezapomeňte podmínky stanovit též pro čitatel dělitele. Často se na to zapomíná. Čitatel dělitele se při dělení stává jmenovatelem, takže podmínka je pro něj nutná!



a) $\frac{x^2-4y^2}{x^2-xy}\cdot\frac{x-y}{x^2+2xy}=\frac{(x+2y)(x-2y)}{x(x-y)}\cdot\frac{x-y}{x(x+2y)}=\frac{x-2y}{x^2}, \quad x \neq 0, y, -2y$

b) $\frac{a^3-8}{a^2+5a-14}\cdot\frac{a^2-49}{2a^2+4a+8}=\frac{(a-2)(a^2+2a+4)}{(a+7)(a-2)}\cdot\frac{(a-7)(a+7)}{2(a^2+2a+4)}=\frac{a-7}{2},$

$a \neq -7; 2$.

c) $\frac{c+d}{c-d}:\frac{c^2+cd}{c^2-d^2}=\frac{c+d}{c-d}\cdot\frac{(c+d)(c-d)}{c(c+d)}=\frac{c+d}{c}, \quad c \neq 0; \pm d$

d) $\frac{2x^2-2x+2}{x^2-25}:\frac{x^3+1}{x^2-4x-5}=\frac{2(x^2-x+1)}{(x-5)(x+5)}\cdot\frac{(x-5)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{2}{x+5}, \quad x \neq \pm 5; -1$.

Průvodce
Poslední série řešených příkladů vám přinese komplexní pohled na úpravy racionálních algebraických výrazů. Úpravy budu provádět postupně, nejdříve společný jmenovatel, sčítání a odčítání v závorkách, pak odstranění závorek a dělení.

Příklad
Upravte.

a) $\left(\dfrac{a}{b^2+ab}-\dfrac{2}{a+b}+\dfrac{b}{a^2+ab}\right):\left(\dfrac{b}{a}-2+\dfrac{a}{b}\right)$

b) $\dfrac{\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}}{\dfrac{8}{4-x^2}}$

c) $\left[(1+x)^{-1}-x^{-1}\right]^{-1}$

d) $\dfrac{\left(x+x^{-1}\right)^{-3}+\left(x-x^{-1}\right)^{-3}}{\left(x^2-x^{-2}\right)^{-3}}$.

Návod a řešení.

a) $\left(\dfrac{a}{b^2+ab}-\dfrac{2}{a+b}+\dfrac{b}{a^2+ab}\right):\left(\dfrac{b}{a}-2+\dfrac{a}{b}\right)=$

$=\left(\dfrac{a}{b(a+b)}-\dfrac{2}{a+b}+\dfrac{b}{a(a+b)}\right):\left(\dfrac{b^2}{ab}-\dfrac{2ab}{ab}+\dfrac{a^2}{ab}\right)=\left(\dfrac{a^2-2ab+b^2}{ab(a+b)}\right):\left(\dfrac{b^2-2ab+a^2}{ab}\right)=$

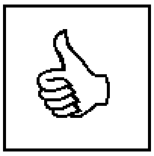
$=\dfrac{(a-b)^2}{ab(a+b)}\cdot\dfrac{ab}{(b-a)^2}=\dfrac{1}{a+b},\quad a\neq 0;\pm b;\, b\neq 0$.

Průvodce
Všimněte si, jaké společné jmenovatele jsem našel, dále rozkladu trojčlenu na součin podle vzorce a úpravy $(b-a)^2=\left[-(a-b)\right]^2=(-1)^2(a-b)^2=(a-b)^2$ v posledním kroku.

b) $\dfrac{\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}}{\dfrac{8}{4-x^2}}=\dfrac{\dfrac{(x+2)(x+2)-(x-2)(x-2)}{(x-2)(x+2)}}{\dfrac{8}{-(x^2-4)}}=$

$=\dfrac{x^2+4x+4-x^2+4x-4}{(x-2)(x+2)}\cdot\dfrac{-(x-2)(x+2)}{8}=\dfrac{-8x}{8}=-x,\quad x\neq\pm 2$

Průvodce
Nejprve rozepíšu umocnění na –1 jako zlomek a teprve poté uvidím, jaké úpravy bude vhodné použít. V každém kroku zvažuji, zda nemohu krátit. Výraz tak bude jednodušší.



c) $\left[(1+x)^{-1}-x^{-1}\right]^{-1}=\left[\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}\right]^{-1}=\left[\frac{x-(1+x)}{(1+x)x}\right]^{-1}=\left[\frac{-1}{(1+x)x}\right]^{-1}=-x(1+x),$

$x\neq 0;-1$

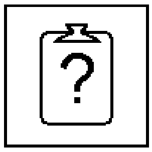
d) $$\frac{\left(x+x^{-1}\right)^{-3}+\left(x-x^{-1}\right)^{-3}}{\left(x^2-x^{-2}\right)^{-3}}=\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{-3}+\left(x-\frac{1}{x}\right)^{-3}}{\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^{-3}}=\frac{\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^{-3}+\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^{-3}}{\left(\frac{x^4-1}{x^2}\right)^{-3}}=$$

$$=\frac{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^{3}+\left(\frac{x}{x^2-1}\right)^{3}}{\left(\frac{x^2}{x^4-1}\right)^{3}}=\frac{\frac{x^3}{\left(x^2+1\right)^3}+\frac{x^3}{\left(x^2-1\right)^3}}{\frac{x^6}{\left(x^4-1\right)^3}}=x^3\left(\frac{1}{\left(x^2+1\right)^3}+\frac{1}{\left(x^2-1\right)^3}\right)\cdot\frac{\left(x^4-1\right)^3}{x^6}=$$

$$=\left(\frac{\left(x^2-1\right)^3+\left(x^2+1\right)^3}{\left(x^2+1\right)^3\left(x^2-1\right)^3}\right)\cdot\frac{\left(x^2-1\right)^3\cdot\left(x^2+1\right)^3}{x^3}=\frac{\left(x^2-1\right)^3+\left(x^2+1\right)^3}{x^3}=$$

$$=\frac{x^6-3x^4+3x^2-1+x^6+3x^4+3x^2+1}{x^3}=\frac{2x^6+6x^2}{x^3}=\frac{2\left(x^4+3\right)}{x},\quad x\neq\pm1;0\,.$$

Úloha 3.1
Upravte.



a) $\left(1+\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{a}{x}\right)\frac{x^3}{a^3-x^3}$

b) $\dfrac{x}{x-\dfrac{1}{x-\dfrac{x}{1-x}}}$

c) $\dfrac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}$.

Řešení naleznete v kapitole 3.4

3.2 Úpravy iracionálních algebraických výrazů

Průvodce
Jak už jsem napsal v úvodu, algebraické výrazy tohoto typu obsahují odmocniny. Proto by bylo vhodné, abyste si práci s odmocninami zopakovali.

Například $\frac{1+x}{\sqrt{x}}, \sqrt{ab}, \frac{1+\sqrt{a}}{2}$.

Dávejte si pozor na podmínky výrazů pod odmocninami. Reálná odmocnina ze záporného čísla není definovaná!

Iracionální výraz

Příklad
Upravte výrazy a stanovte podmínky.

a) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

b) $\left(\frac{a+1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{a-\sqrt{a}}-\frac{a}{\sqrt{a}+1}\right)\frac{\sqrt{3}-a\sqrt{3}}{a+1}$

c) $\left(a\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{b}{1-\sqrt{\frac{b}{a}}}\right):\frac{b+\sqrt{ab}}{b\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}$

d) $\frac{x\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2y\sqrt{x}}\right)^{-1}+y\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2x\sqrt{y}}\right)^{-1}}{\left(\frac{x+\sqrt{xy}}{2xy}\right)^{-1}+\left(\frac{y+\sqrt{xy}}{2xy}\right)^{-1}}$.

Návod a řešení.
Společný jmenovatel, užití vzorce rozdílu druhých mocnin.

a) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\frac{a-2\sqrt{ab}+b+a+2\sqrt{ab}+b}{a-b}=$

$=\frac{2(a+b)}{a-b}, \quad a,b\geq 0,\ a\neq b$.

b) $\left(\frac{a+1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{a-\sqrt{a}}-\frac{a}{\sqrt{a}+1}\right)\frac{\sqrt{3}-a\sqrt{3}}{a+1}=\left(\frac{a+1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}-\frac{a}{\sqrt{a}+1}\right)\frac{\sqrt{3}(1-a)}{a+1}=$

$=\frac{(a+1)\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}\cdot\frac{\sqrt{3}(1-a)}{a+1}=\frac{(a+1)(a-1)}{\sqrt{a}(a-1)}\cdot\frac{-\sqrt{3}(a-1)}{a+1}=\frac{-\sqrt{3}(a-1)}{\sqrt{a}}=$

$=\frac{\sqrt{3}(1-a)}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{3a}(1-a)}{a}, \quad a>0,\ a\neq 1$

Všimněte si rozkladu v součin jmenovatele druhého výrazy $a-\sqrt{a}=\sqrt{a}\sqrt{a}-\sqrt{a}=\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)$.

c) $$\left(a\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{b}{1-\sqrt{\frac{b}{a}}}\right):\frac{b+\sqrt{ab}}{b\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}=\left(\sqrt{ab}+\frac{b}{\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}}\right):\frac{b+\sqrt{ab}}{b\,\frac{a-b}{ab}}=$$

$$=\left(\sqrt{ab}+\frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):\frac{a\left(b+\sqrt{ab}\right)}{a-b}=\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\cdot\frac{a-b}{a\sqrt{b}\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}=$$

Provedení naznačených operací, součty a rozdíly, společný jmenovatel a opět rozklady typu $a=\sqrt{a}\sqrt{a}$, resp. $a-b=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$.

$$=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\cdot\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a\sqrt{b}\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}=1,\quad a>0, b>0, a\neq b$$

d) $$\frac{x\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2y\sqrt{x}}\right)^{-1}+y\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2x\sqrt{y}}\right)^{-1}}{\left(\frac{x+\sqrt{xy}}{2xy}\right)^{-1}+\left(\frac{y+\sqrt{xy}}{2xy}\right)^{-1}}=\frac{\frac{2xy\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{2xy\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\frac{2xy}{x+\sqrt{xy}}+\frac{2xy}{y+\sqrt{xy}}}=$$

$$=\frac{\frac{2xy\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\frac{2xy}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}+\frac{2xy}{\sqrt{y}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}}=\frac{\frac{2xy\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\frac{2xy\sqrt{y}+2xy\sqrt{x}}{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}}=\frac{2xy\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{2xy\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=$$

$$=\sqrt{xy}\quad x,y>0\ .$$

Na závěr vám předkládám ještě dvě úlohy na procvičení.

Úloha 3.2
Upravte výraz
$$\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right).$$

Řešení naleznete v kapitole 3.4

Úloha 3.3
Proveďte a rozhodněte, pro která čísla a má smysl výraz

$$x=\left(\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)+1-a}{\left(1-\sqrt{a}\right)\sqrt[4]{a^3}}\right)^{-2}:\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{9-a^2}}.$$

Řešení naleznete v kapitole 3.4

3.3 Důkazy algebraických rovností a nerovností

Průvodce
Při důkazech platností rovností, resp. nerovností algebraických výrazů vycházím ze základních vlastností rovnosti a nerovnosti. Používat mohu všechny druhy důkazů, tj. přímo, nepřímo i sporem.
Celá situace se vám ozřejmí, když si prostudujete následující úlohy. Sledujte každou úpravu, úlohy nejsou těžké. Výhodou takovýchto příkladů je, že v podstatě znáte výsledek. Cílem je po zralé úvaze a volbě postupu – výhradně používáme **ekvivalentní úpravy** – upravit levou a pravou stranu rovnosti, resp. nerovnosti tak, aby se potvrdilo, zda je platná, či nikoli.

Algebraická rovnost, nerovnost

Příklad
Dokažte, že aritmetický průměr dvou nezáporných čísel je větší nebo roven jejich průměru geometrickému:

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab},\quad a,b\geq 0.$$

Řešení.
Ukáži vám řešení způsobem přímého důkazu.
1. způsob – vyjdu z vhodné známé nerovnosti, že pro každé $a,b\in R$ platí $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$.

Odkud $a-2\sqrt{ab}+b\geq 0\Rightarrow a+b\geq 2\sqrt{ab}\ \Rightarrow\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$, přičemž rovnost nastane pro $a=b$.

Průvodce
Možná některým z vás připadne obtížné uhádnout výchozí nerovnost. Zpravidla je postup takový, že upravujeme danou nerovnost a následně postup obrátíme. Proto vám ukáži ještě další způsob přímého důkazu, který by vám mohl pomoci při „uhádnutí “ výchozí nerovnosti pro předcházející důkaz.

2. způsob – spočívá v důkazu nezápornosti rozdílu levé a pravé strany nerovnosti.
Východiskem pro mě bude rozdíl levé a pravé strany nerovnosti

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}.$$

Vzhledem k tomu, že druhá mocnina každého reálného čísla je číslo nezáporné, platí

$$\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}\geq 0.$$

Odkud $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geq 0$, a proto $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$, pro $a,b\geq 0$.

Příklad
Dokažte, že pro přípustné hodnoty proměnných platí:

$$\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}\right)\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}+1\right)\frac{ab}{a^2+b^2}=\frac{a+b}{a-b}.$$

Řešení.
Úloha směřuje k úpravě levé strany rovnosti na podobu pravé.

$$\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}\right)\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}+1\right)\frac{ab}{a^2+b^2}=\frac{a^2-2ab+b^2+a^2+b^2+2ab}{(a+b)(a-b)}\cdot\frac{a^2+b^2+2ab}{2ab}\cdot$$

$$\cdot\frac{ab}{a^2+b^2}=\frac{2\left(a^2+b^2\right)}{(a+b)(a-b)}\cdot\frac{(a+b)^2}{2ab}\cdot\frac{ab}{a^2+b^2}=\frac{a+b}{a-b},$$ což je rovno pravé straně.

Příklad
Dokažte, že pro každé $a,b,c\in R$ platí rovnost

$$(1+a+b+ab)^2-(1+a-b-ab)^2=4b(1+a)^2.$$

Řešení.

<u>Průvodce</u>
Nejprve upravím levou stranu tak, že se ji pokusím jednodušeji umocnit. Při tomto tvaru by měl výraz šestnáct členů. Sami vidíte, že je možné obě závorky upravit na součin vytknutím.

$$(1+a+b+ab)^2-(1+a-b-ab)^2=(1+b+a(1+b))^2-(1+a-b(1+a))^2=$$
$$[(1+b)(1+a)]^2-[(1-b)(1+a)]^2=(1+a)^2\left[(1+b)^2-(1-b)^2\right]=(1+a)^2\,4b.$$

Úpravu hranaté závorky v posledním kroku vám přenechám na procvičení.

Existuje celá řada užitečných rovností, resp. nerovností. V poslední úloze této opory vám několik z nich předkládám.

Úloha 3.4

Dokažte, že pro všechna reálná čísla a, b platí následující:

a) $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$

b) $0 < a < b \Rightarrow 0 < a^2 < b^2$

c) $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow \dfrac{a^2+b^2}{2} \geq ab$. Kdy nastane rovnost?

Shrnutí kapitoly Úpravy algebraických výrazů

Úprava algebraického výrazu spočívá v nahrazení daného algebraického výrazu jiným výrazem, který se mu rovná ve společném definičním oboru proměnných. Tento definiční obor určíte z podmínek, za nichž daný výraz i jeho úpravy mají smysl.
Při úpravách racionálních výrazů používáte vzorce pro rozklad mnohočlenů a dále vzorce pro počítání se zlomky.
V úlohách na úpravy lomených výrazů musíte klást podmínky, že jmenovatele všech zlomků v původních výrazech i v jejich upravených tvarech musí být různé od nuly.
Při úpravách iracionálních výrazů využíváme poznatky o odmocninách a mocninách s racionálními mocniteli a pravidla pro početní operace se zlomky. Podmínky, za nichž provádíte úpravy, především vyjadřují, že základy všech odmocnin musí být nezáporné a jmenovatele zlomků se nesmějí rovnat nule.

3.4 *Řešení úloh*

Řešení úlohy 3.1

Nejprve proveďte naznačené operace v závorkách, v posledním činiteli rozložte jmenovatel podle $\left(a^3-b^3\right) = (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$.

a) $\left(1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{a^2}{x^2}\right)\left(1-\dfrac{a}{x}\right)\dfrac{x^3}{a^3-x^3} = \left(\dfrac{x^2+ax+a^2}{x^2}\right)\left(\dfrac{x-a}{x}\right)\dfrac{x^3}{(a-x)\left(a^2+ax+x^2\right)} = -1,$

$x \neq 0; a$

b) začněte upravovat od nejjednoduššího lomeného výrazu a postupujte směrem k základní zlomkové čáře

$$\frac{x}{x-\dfrac{1}{x-\dfrac{x}{1-x}}}=\frac{x}{x-\dfrac{1}{\dfrac{x-x^2-x}{1-x}}}=\frac{x}{x+\dfrac{x-1}{-x^2}}=\frac{x^3}{x^3+x-1},\quad x\neq 0;1$$

c) $$\frac{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}\right)\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}=\frac{\left(\dfrac{b+c+a}{b+c}\right)\left(\dfrac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}{\dfrac{b+c-a}{b+c}}=$$

$$=\frac{b+c+a}{b+c}\cdot\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{b+c}{b+c-a}=\frac{b+c+a}{1}\cdot\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}\cdot\frac{1}{b+c-a}=$$

$$=\frac{(b+c+a)^2}{2bc},\quad a,b,c\neq 0;\ a\neq b+c\,.$$

Řešení úlohy 3.2

Nejdříve částečně usměrním a provedu naznačené operace.

$$\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right)=$$

$$=\left(\frac{1+a+\sqrt{1-a^2}}{2a}+\frac{1-a}{\sqrt{(1-a)(1+a)}-(1-a)}\right)\left(\sqrt{\frac{1-a^2}{a^2}}-\frac{1}{a}\right)=$$

$$=\left(\frac{1+a+\sqrt{1-a^2}}{2a}+\frac{\sqrt{1-a}\sqrt{1-a}}{\sqrt{(1-a)(1+a)}-\sqrt{1-a}\sqrt{1-a}}\right)\left(\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}\right)=$$

$$=\left(\frac{1+a+\sqrt{1-a^2}}{2a}+\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\right)\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}=$$

$$=\left(\frac{1+a+\sqrt{1-a^2}}{2a}+\frac{\sqrt{1-a}\left(\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\right)}{2a}\right)\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}=$$

$$=\left(\frac{1+a+\sqrt{1-a^2}}{2a}+\frac{\sqrt{1-a^2}+1-a}{2a}\right)\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}=\frac{2+2\sqrt{1-a^2}}{2a}\cdot\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}=$$

$$=\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\cdot\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}=\frac{1-a^2-1}{a^2}=-1,\quad a\in(-1;0)\cup(0;1).$$

Řešení úlohy 3.3

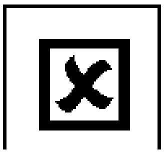
Výraz x upravujeme postupně takto:

$$x=\left(\frac{\left(1-\sqrt{a}\right)\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)+1-a}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{9-a^2}}{a\sqrt{a}}=\frac{\left(1-\sqrt{a}\right)^2\sqrt{a^3}}{\left(1-\sqrt{a}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{9-a^2}}{a\sqrt{a}}=\sqrt{9-a^2}\,.$$

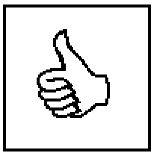
Aby výraz x měl smysl, je především nutné, aby $a>0,\ a\neq 1$, neboť pro záporné a výraz $\sqrt{a}$ nemá smysl, pro $a=0$ nemá smysl dělenec výrazu x a pro $a=1$ nemá smysl jmenovatel dělence.

Dále pro výraz $\sqrt{9-a^2}$ je nutno, aby $9-a^2>0$, což nastane pro $0<a<3,\ a\neq 1$.
Závěr: Upravený výraz $x=\sqrt{9-a^2}$ má smysl pro $a\in(0;1)\cup(1;3)$.

Řešení úlohy 3.4



a) $a=b\Rightarrow a-b=0\Rightarrow(a-b)(a+b)=0\Rightarrow a^2-b^2=0\Rightarrow$
$\Rightarrow a^2=b^2$



<u>Průvodce</u>
Po převodu b na levou stranu je výraz $a-b$ roven nule. Odkud mohu rovnici vynásobit výrazem $a+b$, různým od nuly. Poté užiji vzorce a po převodu b^2 na pravou stranu rovnice získám dokazovaný tvar rovnosti.

b) $0<a<b\Rightarrow a-b<0\wedge a+b>0\Rightarrow(a-b)(a+b)<0\Rightarrow a^2-b^2<0\Rightarrow$
$\Rightarrow< a^2<b^2\Rightarrow 0<a^2<b^2$

c) $(a-b)^2\geq 0\Rightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0\Rightarrow a^2+b^2\geq 2ab\Rightarrow$
$\Rightarrow\dfrac{a^2+b^2}{2}\geq ab,$ přičemž rovnost nastane v případě $a=b$.

Rejstřík

Literatura

[1] JANEČEK, František. *Maturujeme z matematiky*. Praha : Fi BLUG.
ISBN 80-85635-39-9

[2] JANEČEK, František. *Výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy*.
Praha : Prometheus. 2003.
ISBN 80-7196-076-4

[3] JIRÁSEK, František a kol. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ*.
Praha : SPN. 1986

[4] KUBÁT, Josef a kol. *Maturitní minimum*. Praha : Prometheus. 1996.
ISBN 80-7196-030-6

[5] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. Praha : SPN. 1991.
ISBN 80-04-22885-2

[6] POLÁK, Josef. *Středoškolská matematika v úlohách I*. Praha : Prometheus.
1996.
ISBN 80-7196-021-7

[7] VEJSADA, František a kol. *Sbírka úloh z matematiky*. Praha : SPN. 1969.

[8] ZHOUF, Jaroslav. *Sbírka testových úloh k maturitě z matematiky*.
Praha : Prometheus. 2002.
ISBN 80-7196249-X

Poznámky

Základní pravidla výpočtu matematických úloh
Algebraické úlohy

RNDr. Michal Vavroš

Ostrava 2005

Název	Základní pravidla výpočtu matematických úloh Algebraické úlohy
Editor	RNDr. Michal Vavroš
Vydavatel	Gymnázium, Ostrava–Poruba, Čs. exilu 669
Rozsah	67 stran
Vydání	první, 2005
Tisk	Gymnázium, Ostrava–Poruba, Čs. exilu 669
Doporučená cena	**zdarma**; vytvořeno v rámci projektu SIPVZ 2005

ISBN 80-903 647-5-6