Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669

STUDIJNÍ OPORA DISTANČNÍHO VZDĚLÁVÁNÍ

ŘEŠENÍ FYZIKÁLNÍCH ÚLOH

ANTONÍN BALNAR

Ostrava 2005

Recenze: prof. RNDr. Erika Mechlová, CSc.

Publikace byla vytvořena v rámci projektu Státní informační politiky ve vzdělávání v roce 2005.

ISBN 80-903647-4-8

Obsah

Úvod

Úspěšné zvládnutí středoškolské fyziky znamená nejen pochopit teoretický základ studovaných problémů, ale i zvládnout praktické dovednosti, jako je řešení fyzikálních úloh, zakreslování grafů a schémat a laboratorní měření. Protože distanční forma studia je specifická, laboratorní měření a počítačem podporované experimenty připravovat nebudete.

Žáci prezenční formy studia se s fyzikou setkávají každý týden nejméně dvakrát a nejasnosti mohou konzultovat s vyučujícími denně. Distanční studenti tuto výhodu nemají, což se u zkoušek projevuje jako výrazný handicap. Proto se jedna z opor, které jsme se rozhodli vytvořit v rámci projektu podporovaného grantem Státní informační politiky ve vzdělávání, zabývá řešením fyzikálních úloh.

Tuto oporu byste měli prostudovat před samotným studiem tematických celků z učebnic, ze kterých se budete na zkoušku připravovat. Opora nekopíruje obsah učebnic, ale je jejich doplňkem. Učitel často doprovází řešení úloh svým vlastním komentářem, o který jsou studenti distančního studia ošizeni. Všechna pravidla musí „objevit“ sami. s oporou proto ušetříte spoustu času, nebudete muset přemýšlet, jak pracovat s úlohou zadanou tabulkou nebo grafem, jak správně převést fyzikální jednotky, jak fyzikálně interpretovat výsledek matematického řešení úlohy atd. V prvním ročníku se nejprve seznámíte s mechanikou, proto se většinu možných záludností ukázat právě na úlohách z mechaniky, respektive z molekulové fyziky, která je součástí učiva fyziky druhého ročníku gymnázia. Typově i náročností jsem vybíral úlohy jako jsou uvedeny v [4], [5] a [21].

Vzhledem k vašemu postavení jsem nepovažoval za nutné vymýšlet složité úlohy z praxe a doplňovat je „hustou omáčkou“. Používám často v úlohách jen obecné termíny jako těleso atd. Úlohy jsou stručné, ale jednoznačné.

Práci s oporou střídejte se studiem fyzikálních učebnic a mějte připraveny i učebnice matematiky. Fyzika je z pohledu řešení úloh jen matematika aplikovaná ve slovních úlohách z oblasti fyziky.

Po prostudování opory budete umět:

- formální zápis při řešení fyzikálních úloh;
- fyzikálně interpretovat výsledky matematických řešení úloh;
- převádět fyzikální jednotky;
- řešit fyzikální úlohy včetně úloh zadaných formou grafu nebo tabulky.

Po prostudování opory budete schopni:

- pracovat s fyzikálním textem;
- aplikovat matematické postupy a výpočty ve fyzikálních úlohách;
- pracovat s hodnotami zapsanými v tabulce nebo zadanými grafem.

1 Formální zpracování fyzikálních úloh

<u>V této kapitole se naučíte</u>:

- fyzikálně analyzovat zadání fyzikální úlohy;
- správně postupovat při řešení fyzikální úlohy.

<u>Klíčová slova kapitoly</u>: ***zadání fyzikální úlohy; postup řešení; fyzikální interpretace výsledku.***

<u>Čas potřebný pro prostudování kapitoly</u>*:* 0,5 hodiny

<u>Průvodce</u>
Řada žáků si nedá poradit a místo písemné práce odevzdává „chaos“. Přitom s pravidly jak řešit úlohu jsou detailně seznámeni. v jejich zápisu je velmi těžké se orientovat a z toho pramení i spousta chyb. Žáci zapomenou na převádění jednotek, chybným označením dosadí do vztahu jinou hodnotu atd. Podobné nedostatky jsou zbytečné.

Fyzikální úlohy mají často podobu slovní úlohy z oblasti fyziky, jak je známe z matematiky. To znamená, že některé údaje nejsou v textu explicitně přímo napsány, ale vyplývají z okolností. Při řešení nevystačíte jen se znalostí matematických operací, protože pro úspěšné řešení je třeba využít fyzikální vztahy a kombinovat je.

Postup řešení

Při řešení fyzikální úlohy postupujte následujícím způsobem:

1. Úlohu si dvakrát přečtěte, abyste si ujasnili, co je v úloze uvedeno a co máte sami zjistit.
2. Vytvořte zkrácený zápis, ve kterém všechny jednotky převeďte do SI (viz kapitola 2). Do zápisu můžete připsat i implicitně nepřímo zadané hodnoty (např. je-li uveden 1 litr vody, je jeho hmotnost asi 1 kg) a fyzikální konstanty související s problémem.
3. Zakreslete situaci do obrázku. Obrázek vás často navede na vhodné řešení.
4. Poznačte si fyzikální vztahy, které budete při řešení úlohy potřebovat. Dostanete rovnici nebo soustavu rovnic, jejichž řešení vede k výsledku.
5. Obecně vyjádřete hledanou veličinu. Až potom do výsledného vztahu dosaďte číselné hodnoty (viz *Řešená úloha 1*).
6. Výsledek řešené úlohy fyzikálně interpretujte, porovnejte se zadáním úlohy a napište odpověď.

<u>Řešená úloha 1</u>

Balón byl vržen svisle vzhůru rychlostí 18 $\frac{\text{km}}{\text{hod}}$. Do jaké maximální výšky vystoupí?

$v = 18\ \frac{\text{km}}{\text{hod}} = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$h = ?\ \text{m}$

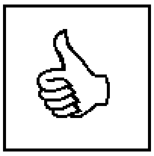
$g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Řešení:
Výpočet se opírá o zákon zachování mechanické energie: kinetická energie E_k na počátku pohybu se rovná potenciální energii E_p v nejvyšším bodě trajektorie.

$$E_k = E_p$$
$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$
$$\frac{1}{2}v^2 = gh$$
$$h = \frac{v^2}{2g}$$
$$\{h\} = \frac{5^2}{2 \cdot 9{,}81}$$
$$h = 1{,}27\,\mathrm{m}$$

Balón vystoupí do maximální výšky 1,27 m.

Průvodce
K zápisu: Převedl jsem rychlost na metry za sekundu. Tíhové zrychlení ***g*** je obecně známá konstanta.
K výpočtu: v obecném řešení vystupuje i hmotnost *m*, která se však v rovnici krátí a nemusíme ji znát! Pokud bych se snažil nejprve vypočítat číselnou hodnotu kinetické energie, nemohl bych dále v řešení úlohy pokračovat.



2 Převádění jednotek SI

<u>V této kapitole se dozvíte</u>:

- co je Mezinárodní soustava jednotek;
- které jednotky jsou základní, doplňkové, odvozené a vedlejší;
- pravidla pro převádění jednotek fyzikálních veličin.

<u>V této kapitole se naučíte</u>:

- převádět fyzikální jednotky;
- odvozovat vztahy pro převody jednotek;
- provádět rozměrovou analýzu.

<u>Klíčová slova kapitoly</u>: ***SI; fyzikální jednotka; fyzikální veličina; základní jednotka, doplňková jednotka, vedlejší jednotka, odvozená jednotka; převádění jednotek; násobky a díly jednotek; rozměrová analýza***.

<u>Čas potřebný pro prostudování kapitoly</u>*:*
1,5 hodiny teorie + 1,5 hodiny řešení úloh

2.1 SI

Od roku 1960 platí ve většině států tzv. Mezinárodní soustava jednotek, zkráceně SI (z franc. *Systѐme International d´Unités*). Vědci, obchodníci i obyčejní lidé mohou jednodušeji porovnávat údaje z různých částí světa. Například délka je standardně uváděna v metrech a lokty, stopy, míle a pídě se už ve fyzice nepoužívají.

SI má sedm základních jednotek, dvě doplňkové jednotky, několik vedlejších jednotek a odvozené jednotky.

základní jednotky

Základní jednotky – jednotky délky, hmotnosti, času, termodynamické teploty, elektrického proudu, látkového množství a svítivosti umožňují popsat celé spektrum fyzikálních disciplín. Pokud vám ve výčtu některé veličiny chybí, jejich jednotky jsou tzv. odvozené jednotky, například elektrické napětí, síla, práce, energie, ... i když odvozené jednotky mají často vlastní název – volt, newton, joule, ..., dají se vyjádřit pomocí součinu sedmi základních jednotek v různých mocninách.

odvozené jednotky

doplňkové jednotky

Doplňkové jednotky radián a steradián slouží ke geometrickému zpřesnění fyzikálního popisu.

vedlejší jednotky

Vedlejší jednotky je povoleno používat v praxi – Celsiův stupeň, tuna, litr, elektronvolt, světelný rok, ...

Mezinárodní soustava jednotek			
Základní jednotky			
Veličina	Značka	Jednotka	Značka
délka	*l*	metr	m
hmotnost	*m*	kilogram	kg
čas	*t*	sekunda	s
elektrický proud	*I*	ampér	A
termodynamická teplota	*T*	kelvin	K
látkové množství	*n*	mol	mol
svítivost	*I*	candela	cd
Doplňkové jednotky			
rovinný úhel	$\alpha, \beta, \gamma\ldots$	radián	rad
prostorový úhel	Ω	steradián	sr

Řešená úloha 2

Vyjádřete 1 newton pomocí základních jednotek SI.

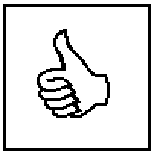
Řešení:

Newton je jednotka síly. Síla $\boldsymbol{F}$ je definována vztahem $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, kde m je hmotnost tělesa a $\boldsymbol{a}$ jeho zrychlení. Jednotkou hmotnosti je kilogram, jednotkou zrychlení $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ (metr je v první mocnině; sekunda ve druhé). Vztah pro výpočet síly můžeme považovat z matematického pohledu za rovnici, musí být obě strany ekvivalentní. Takže i jejich fyzikální rozměr – tj. rozměr jednotky musí být stejný. Rozměr jednotek na pravé straně je $\mathrm{kg}^1\cdot\mathrm{m}^1\cdot\mathrm{s}^{-2}$. Jednička označující první mocninu se nezapisuje; další čtyři základní jednotky SI zastoupeny nejsou (mají nultou mocninu – jejich hodnota je jedna).

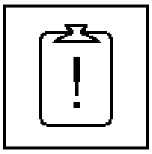
$$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

Průvodce

Převádět jednotky na základní jednotky vede **vždy** ke správnému řešení, ale ve speciálních případech můžete převádění pominout. Pokud jsou stejné veličiny například v poměru, nemusíte zlomek upravovat. Bylo by to krácení nebo rozšiřování, které nemá na číselnou hodnotu výrazu vliv (viz *Řešená úloha 3*). Podobných výjimek, kdy převádění není nutné, existuje víc.



Řešená úloha 3



V jaké vzdálenosti od Slunce by obíhala planeta, jejíž oběžná doba by byla deset let?

$T = 10$ let
$T_Z = 1$ rok
$a_Z = 1$ AU
$a = ?$ AU

Řešení:
Oběžná doba planet se udává v letech a vzdálenost planet od Slunce v astronomických jednotkách AU. 1 AU je střední vzdálenost Země – Slunce; 1 AU = $1{,}5 \cdot 10^8$ km. I když v zadání je explicitně uveden jen jeden údaj – oběžná doba planety, k výpočtu můžeme použít oběžnou dobu a vzdálenost od Slunce jakékoliv další planety (nejlépe Země, proto index „z“).
Z třetího Keplerova zákona pro vzdálenost planety vyplývá:

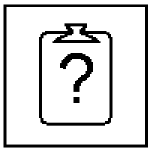
$$\frac{T^2}{T_Z^2} = \frac{a^3}{a_Z^3} \Rightarrow a^3 = \frac{a_Z^3 T^2}{T_Z^2}$$

$$a = a_Z \sqrt[3]{\frac{T^2}{T_Z^2}}$$

$$\{a\} = 1 \sqrt[3]{\frac{10^2}{1^2}}$$

$$a = 4{,}64 \text{ AU.}$$

Střední vzdálenost planety od Slunce by byla asi 4,64 AU tedy 4,64krát větší než vzdálenost Země od Slunce. Kdybych oběžné doby převedl na sekundy a vzdálenosti na metry, výsledek by byl stejný.



<u>Úloha 1</u>
Rozhodněte, zda platí 1 J = 1 $kg^2 \cdot m^2 \cdot s^{-3}$.
(Řešení úlohy je na straně 17.)

<u>Úloha 2</u>
Vyjádřete 1 watt pomocí základních jednotek SI.
(Řešení úlohy je na straně 17.)

2.2 Násobky a díly jednotek

V minulosti se násobky a díly označovaly slovně. Většina předpon znamená v latině, italštině nebo řečtině přídavné jméno „malý“, „velký“ atd. Pro výpočty je však výhodnější uvádět násobky a díly jednotek pomocí mocnin deseti. Sčítání různých hodnot velikosti fyzikální veličiny se omezí na jednoduché matematické operace. Problém může nastat u veličin, jejichž jednotka je složená nebo je jinak historicky zavedena (viz kapitola *2.3 Převody fyzikálních jednotek*).

Násobné předpony			Dílčí předpony		
Předpona	Značka	Matematické vyjádření	Předpona	Značka	Matematické vyjádření
yotta-	Y	10^{24}	deci-	d	10^{-1}
zetta-	Z	10^{21}	centi-	c	10^{-2}
exa-	E	10^{18}	mili-	m	10^{-3}
peta-	P	10^{15}	mikro-	µ	10^{-6}
tera-	T	10^{12}	nano-	n	10^{-9}

giga-	G	10^9	piko-	p	10^{-12}
mega-	M	10^6	femto-	f	10^{-15}
kilo-	k	10^3	atto-	a	10^{-18}
hekto-	h	10^2	zepto-	z	10^{-21}
deka-	da	10^1	yokto-	y	10^{-24}

Řešená úloha 4
Chodec nejprve ušel 3 km a potom dalších 8 000 dm. Jakou celkovou vzdálenost urazil?

l = 3 km + 8 000 dm
$l = 3\cdot10^3$ m + $8\cdot10^2$ m
$l = 3{,}8\cdot10^3$ m = 3,8 km
Chodec urazil dráhu 3,8 km.

Úloha 3

Převeďte:	0,23 kV	=	V
	260 μA	=	A
	$3\cdot10^5$ kW	=	W

(Řešení úlohy je na straně 17.)

2.3 Převody fyzikálních jednotek

Mezi složitější převody nejběžnějších jednotek patří převody jednotek plošného obsahu, objemu, hustoty a rychlosti.

Průvodce
U převádění objemu a plošného obsahu si musíte dát pozor na mocniny jednotek. Například krychle o straně 1 m má objem 1 m^3, ale také ji můžeme považovat za krychli o délce strany 10 dm, takže objem je 1000 dm^3. Ačkoli jsem rozměr délky hrany změnil o jeden řád (z metru na decimetr), objem se změnil o tři řády!

obsah

Plošný obsah nejčastěji převádíme na čtvereční metry m^2 – např. čtverec se stranou 1m. Běžně ale používáme i mm^2, cm^2, dm^2 a km^2. V praxi se pak setkáváme i s ary a hektary. 1 ar je 100 m^2 (10 m x 10 m) a 1 hektar (značka ha) 10 000 m^2 (100 m x 100 m).

Řešená úloha 5
Převeďte: 36 ha = ? m^2
36 ha = 36·10 000 m^2
36 ha = 360 000 m^2

0,005 ar = ? dm^2
0,005 ar = 0,005·100 m^2 = 0,5 m^2 = 0,5·100 dm^2 = 50 dm^2
0,005 ar = 50 dm^2

Úloha 4

Převeďte: $0{,}8\ \text{m}^2 = \quad \text{cm}^2$

$560\ \text{ar} = \quad \text{km}^2$

$0{,}09\ \text{km}^2 = \quad \text{ha}^2$

(Řešení úlohy je na straně 17.)

objem

Objem převádíme podobně jako plošný obsah. V praxi se nejčastěji používají krychlové milimetry mm^3, krychlové centimetry cm^3, krychlové decimetry dm^3, krychlové metry m^3 a litry. Decilitr je desetina litru, hektolitr je 100 l. Přitom platí, že 1 dm^3 je 1 litr.

Řešená úloha 6

Převeďte: $4{,}7\ \text{dl} = ?\ \text{cm}^3$

$4{,}7\ \text{dl} = 0{,}47\ \text{l} = 0{,}47\ \text{dm}^3$

$0{,}47\ \text{dm}^3 = 0{,}47 \cdot 1\,000\ \text{cm}^3$ (protože $1\ \text{dm}^3 = 1000\ \text{cm}^3$)

$0{,}47\ \text{dl} = 470\ \text{cm}^3$

$1{,}4\ \text{m}^3 = ?\ \text{hl}$

$1{,}4\ \text{m}^3 = 1{,}4 \cdot 1\,000\ \text{dm}^3 = 1\,400\ \text{dm}^3 = 1\,400\ \text{l} = 14\ \text{hl}$

$1{,}4\ \text{m}^3 = 14\ \text{hl}$

Úloha 5

Převeďte: $540\ \text{cm}^3 = \quad \text{dm}^3$

$0{,}08\ \text{l} = \quad \text{cm}^3$

$400\ \text{dl} = \quad \text{hl}$

(Řešení úlohy je na straně 17.)

hustota

Hustota ρ udává hmotnost jednotky objemu stejnorodé látky:

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Na gymnáziu není potřeba v souvislosti s hustotou používat jinou jednotku objemu než cm^3 nebo m^3. I když se hustoty látek výrazně liší – 1 m^3 vzduchu má hmotnost asi 1,3 kg a rtuti 13 500 kg, používáme pro zápis hmotnosti jednoho „kubíku“ pouze kilogramy a pro zápis hmotnosti jednoho krychlového centimetru gramy. Hustotu tedy uvádíme v $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ a v $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Pro tyto dvě jednotky hustoty platí následující převodní vztahy:

$$1\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \frac{1 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}}{1 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^3} = 1 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

$$1\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \frac{1 \cdot 10^3\ \text{g}}{1 \cdot 10^6\ \text{cm}^3} = 1 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 0{,}001\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

rychlost

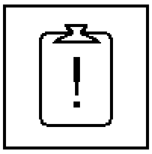
Rychlost vyjádřenou různými jednotkami převádíme obdobně. Rychlost je definována jako podíl dráhy a času:

$$v = \frac{s}{t}.$$

Rychlost automobilu vyjadřujeme v kilometrech za hodinu – $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ale pro výpočty je nutné používat jednotku $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ – metr za sekundu, tj. jednotku SI. Pro tyto dvě jednotky rychlosti platí následující převodní vztahy:

$$1\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1\ \frac{1000\ \text{m}}{3600\ \text{s}} = 0{,}2\overline{7}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$1\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1\ \frac{\frac{1}{1\,000}\ \text{km}}{\frac{1}{3\,600}\ \text{h}} = 3{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$



<u>Řešená úloha 7</u>

Převeďte: a) $18\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = ?\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

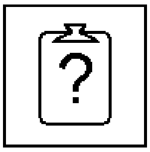
$$18\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 18\ \frac{1000\ \text{m}}{3600\ \text{s}} = \frac{18\ 000\ \text{m}}{3600\ \text{s}} = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$18\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) $3{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = ?\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

$$3{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3{,}5\ \frac{\frac{1}{1\,000}\ \text{km}}{\frac{1}{3\,600}\ \text{h}} = 3{,}5\ \frac{3\ 600\ \text{km}}{1\,000\ \text{h}} = 12{,}6\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$3{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 12{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$



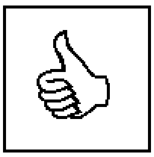
<u>Úloha 6</u>

Převeďte: $72\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = ?\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = ?\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

$0{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = ?\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

(Řešení úlohy je na straně 17.)



<u>Průvodce</u>

Mnozí žáci, kteří na gymnázium přicházejí ze základních škol, znají převody rychlosti nazpaměť. Je to chyba, protože kapacita lidského mozku je omezená a člověk by měl mozek využívat k přemýšlení, ne jen k ukládání poznatků. Snažte se proto převody odvozovat. Nepřekvapí vás potom převod z centimetrů za minutu na metry za den, třeba u výpočtu rychlosti hlemýždě. Takové převody máme my učitelé fyziky u zkoušení obzvláště rádi!

Výsledky úloh

Úloha 1	1 J rozměrově neodpovídá 1 $kg^2 \cdot m^2 \cdot s^{-3}$, ale 1 J = 1 $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$.				
Úloha 2	1 W = $kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$ (*výkon je práce za čas, jednotka výkonu je tedy joule za sekundu*).				
Úloha 3	0,23 kV	=	230 V		
	260 μA	=	$260 \cdot 10^{-6}$ a	=	$2{,}6 \cdot 10^{-4}$ A
	$3 \cdot 10^5$ kW	=	$3 \cdot 10^8$ W		
Úloha 4	0,8 m^2	=	8 000 cm^2		
	560 ar	=	0,056 km^2		
	0,09 km^2	=	9 ha^2		
Úloha 5	540 cm^3	=	0,54 dm^3		
	0,08 l	=	80 cm^3		
	400 dl	=	0,4 hl		
Úloha 6	$72\ \frac{km}{h}$	=	$20\ \frac{m}{s}$		
	$5\ \frac{m}{s}$	=	$18\ \frac{km}{h}$		
	$0{,}25\ \frac{m}{s}$	=	$0{,}9\ \frac{km}{h}$		

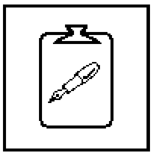
3 Základní matematické postupy – úpravy výrazů

<u>V této kapitole se dozvíte</u>:

- na jaké nejčastější chyby si musíte dát pozor při úpravách výrazů;
- které matematické úpravy budete nejčastěji při řešení úloh používat.

<u>V této kapitole se naučíte</u>:

- vyjadřovat neznámou ze vzorce;
- využívat pravidla pro úpravu lomených výrazů, mocnin a odmocnin.



<u>Klíčová slova kapitoly</u>: *úprava matematického výrazu; vyjádření neznámé ze vzorce; vytýkání; umocňování; odmocňování.*

<u>Čas potřebný pro prostudování kapitoly</u>*:* 2 hodiny

Algebraické výrazy musí umět řešit každý žák fyziky. Nejprve se vám pokusím vysvětlit vyjádření neznámé ze vzorce, ve kterém jsou mocniny a odmocniny a ve kterém je zároveň nutné vytýkat nebo používat tzv. součtové vzorce. Pravidla pro tyto úpravy naleznete ve všech učebnicích matematiky pro 1. ročník gymnázia a přehledech středoškolské matematiky. Také tam naleznete pravidla pro sčítaní, násobení, dělení a rozklad mnohočlenů a lomených výrazů. Bez znalostí popsaných v těchto učebnicích se neobejdete ani ve fyzice. Složitější operace, jako je logaritmování nebo práce s goniometrickými funkcemi, se pokusím ozřejmit v samostatných kapitolách.
Mezi nejobecnější pravidla úpravy mnohočlenů a lomených výrazů patří:

- Výraz pod odmocninou nesmí být záporný – příklady řešíme v oboru reálných a ne komplexních čísel.
- Nelze dělit ani krátit nulou. Tomuto pravidlu neřekne na našem gymnáziu nikdo jinak než „*Jedenácté Boží (též Vavrošovo) přikázání*“! Můj kolega a kamarád RNDr. Michal Vavroš určitě ví, proč na něj klade takový důraz.... Nezapomeňte, že i neznámá by mohla nabýt nulovou hodnotu!
- Rovnice nesmíme nejen dělit, ale ani násobit nulou. Násobení by tak nebylo ekvivalentní úpravou. Vynásobím-li nesmyslnou rovnost 5 = 4 nulou, dostanu zápis 0 = 0, který už je správný.

Úpravy výrazů používáme v každé fyzikální úloze. V této opoře vás chci seznámit se základními aplikacemi matematických poznatků ve fyzice. Pokud si myslíte, že jsou vaše znalosti úprav algebraických výrazů a mnohočlenů slabší, nastudujte je nejdříve z odborných matematických učebnic.
I když následující řešená úloha číslo 8 nemá fyzikální základ, je jeho úspěšné vyřešení důležité pro další studium fyziky. Považuji ho za „lakmusový“ papírek vašich matematických schopností. Nemáte-li s úpravou podobných výrazů problém, jsou vaše matematické základy solidní a pro fyziku dostačující.

Průvodce
S úpravami, které popisuji v této kapitole, se seznamují žáci druhého stupně základních škol. Problém je v tom, že poznatky z matematiky neumějí využít ve fyzice. Může to být proto, že fyzika vedle matematických omezení klade na výpočet i omezení vlastní. Čas, hmotnost a délka trajektorie nemohou být nikdy záporné apod.

Řešená úloha 8

Vyjádřete všechny neznámé z výrazu: $\frac{(a-2b)^2}{3c+d^2}=1$.

Řešení:

1) Vyjádření neznámé *a:*

$$\frac{(a-2b)^2}{3c+d^2}=1$$
$$(a-2b)^2=3c+d^2$$
$$(a-2b)=\sqrt{3c+d^2}$$
$$a=\sqrt{3c+d^2}+2b$$

Průvodce
Nejprve jsem vynásobil obě strany rovnice jmenovatelem ($3c + d^2$), potom jsem obě strany rovnice odmocnil a nakonec jsem převedl výraz $-2b$ na pravou stranu.

2) Vyjádření neznámých *b*, *c* a *d*:

$$\frac{(a-2b)^2}{3c+d^2}=1$$
$$(a-2b)^2=3c+d^2$$
$$(a-2b)=\sqrt{3c+d^2}$$
$$-2b=\sqrt{3c+d^2}-a$$
$$b=\frac{a-\sqrt{3c+d^2}}{2}$$

$$\frac{(a-2b)^2}{3c+d^2}=1$$
$$(a-2b)^2=3c+d^2$$
$$3c+d^2=(a-2b)^2$$
$$3c=(a-2b)^2-d^2$$
$$c=\frac{(a-2b)^2-d^2}{3}$$

$$\frac{(a-2b)^2}{3c+d^2}=1$$
$$(a-2b)^2=3c+d^2$$
$$3c+d^2=(a-2b)^2$$
$$d^2=(a-2b)^2-3c$$
$$d=\sqrt{(a-2b)^2-3c}$$

Řešená úloha 9

Jaká bude výsledná teplota vody v kalorimetru o tepelné kapacitě $320\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$? Dva litry vody o teplotě 280 K byly smíchány s 1,2 l vody o teplotě 340 K.

Průvodce
Sestavím kalorimetrickou rovnici, která popisuje sdílení tepla mezi tělesy. Teplo je definováno $Q = mc\Delta T$, kde m je hmotnost, c měrná tepelná kapacita (je uvedena v MFChT) a ΔT je změna teploty.

$C = 320\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$

$V_1 = 2$ l $\quad m_1 = 2$ kg $\quad T_1 = 280$ K

$V_2 = 1{,}2$ l $\quad m_2 = 1{,}2$ kg $\quad T_2 = 340$ K

$c = 4\,180\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K\cdot kg}}$

$T = ?$ K

Řešení:
Kalorimetrická rovnice bude mít tvar:

$$cm_2(T_2 - T) = cm_1(T - T_1) + C(T - T_1)\,.$$

Abych vyjádřil výslednou teplotu *T*, musím nejprve výrazy na obou stranách rovnice roznásobit, potom převedu všechny členy s neznámou na levou stranu a všechny ostatní na stranu pravou a nakonec teplotu *T* vytknu:

$$cm_2(T_2 - T) = cm_1(T - T_1) + C(T - T_1)$$
$$cm_2T_2 - cm_2T = cm_1T - cm_1T_1 + CT - CT_1$$
$$cm_2T + cm_1T + CT = cm_2T_2 + cm_1T_1 + CT_1$$
$$T(cm_2 + cm_1 + C) = cm_2T_2 + cm_1T_1 + CT_1$$
$$T = \frac{cm_2T_2 + cm_1T_1 + CT_1}{cm_2 + cm_1 + C}$$
$$\{T\} = \frac{4180 \cdot 1{,}2 \cdot 340 + 4180 \cdot 2 \cdot 280 + 320 \cdot 280}{4180 \cdot 2 + 4180 \cdot 1{,}2 + 320}$$
$$T = 302\ \mathrm{K}$$

Výsledná teplota je 302 K.

Úloha 7

Vyjádřete neznámé *x*, *y* a *z* z výrazu: $\dfrac{-2(2x-1)^2 + 3}{2 + z^3} = 2y^2$.

(Řešení úlohy je na straně 22.)

Průvodce
V řešených úlohách č. 8 a 9 jste viděli, že úprava vztahu vede téměř vždy k racionálnímu lomenému výrazu, který je žáky chybně označován jako „zlomek“. Ve zlomku jsou totiž pouze čísla. Proto musíte umět určit, pro které hodnoty proměnné je výraz definován, čili najít **definiční obor** výrazu (viz řešená úloha č. 10).

Řešená úloha 10

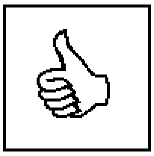
Pro které hodnoty proměnné *x* má výraz $\dfrac{x+1}{x^2 - x}$ smysl?

Řešení:
Protože jmenovatel nesmí být roven nule, vytknu neznámou *x* a lépe poznám, kdy by tato varianta mohla nastat:

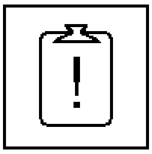
$$\frac{x+1}{x^2 - x} = \frac{x+1}{x(x-1)}\,.$$

Jmenovatel by byl roven nule, pokud se bude rovnat nule *x*, nebo člen v závorce. To znamená, že *x* se nesmí rovnat 0 nebo 1.

Průvodce
Žáci často automaticky zapisují do podmínek definičního oboru, že proměnná nesmí být rovna nule. V řešené úloze 10 to je správné, protože bychom skutečně násobili závorku nulou a výsledkem takového násobení je vždy 0. V řešené úloze č. 11 se můžete přesvědčit, že tato podmínka není univerzální.



Řešená úloha 11



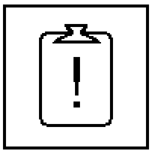
Pro které hodnoty proměnných *x* a *y* má výraz $\dfrac{1}{x^2 - \dfrac{y^2}{9}}$ smysl?

Řešení:
Výraz ve jmenovateli můžeme rozložit na součin pomocí vzorce
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:

$$\frac{1}{x^2 - \frac{y^2}{9}} = \frac{1}{x^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2} = \frac{1}{\left(x - \frac{y}{3}\right)\left(x + \frac{y}{3}\right)}.$$

Výraz nemá smysl pro hodnoty proměnných $x \neq \pm\dfrac{y}{3}$.

Řešená úloha 12



Pro které hodnoty proměnných *x* a *y* má výraz $\dfrac{1}{x\sqrt{-(4xy - y)}}$ smysl?

Řešení:
Výraz pod odmocninou nesmí být záporný a zároveň jmenovatel nesmí být roven nule.
Výraz mohu upravit na tvar:

$$\frac{1}{x\sqrt{-(4xy - y)}} = \frac{1}{x\sqrt{y - 4xy}} = \frac{1}{x\sqrt{y(1-4x)}}.$$

Nyní vyřeším odmocninu ve jmenovateli: Výraz bude kladný, pokud budou oba členy součinu *y* a (1 - 4*x*) zároveň kladné, nebo zároveň záporné:

$$y > 0 \ \wedge\ (1-4x) > 0 \qquad\qquad y < 0 \ \wedge\ (1-4x) < 0$$
$$y > 0 \ \wedge\ -4x > 1 \quad \text{nebo} \quad y < 0 \ \wedge\ -4x < 1$$
$$y > 0 \ \wedge\ x < -\frac{1}{4} \qquad\qquad y < 0 \ \wedge\ x > -\frac{1}{4}.$$

Protože ve jmenovateli nesmí být nula, musí dále vždy platit:

$$x \neq 0;\ y \neq 0;\ x \neq -\frac{1}{4}.$$

Úloha 8

Pro které hodnoty proměnných *x* a *y* má výraz $\dfrac{1}{13yx^2-3xy}$ smysl?

(Řešení úlohy je na této straně.)

Úloha 9

Pro které hodnoty proměnných *x* a *y* má výraz $\dfrac{1}{\sqrt{-4\left(2xy-y^2\right)}}$ smysl?

(Řešení úlohy je na této straně.)

Úloha 10

Pro které hodnoty proměnných *x* a *y* má výraz $\dfrac{1}{\dfrac{x^2}{4}-y^2}$ smysl?

(Řešení úlohy je na této straně.)

Výsledky úloh

Úloha 7 $x=\dfrac{\sqrt{\dfrac{2y^2\left(2+z^3\right)-3}{-2}+1}}{2}$; $y=\dfrac{\sqrt{-2\left(2x-1\right)^2+3}}{4+2z^3}$;

$z=\sqrt[3]{\dfrac{-2\left(2x-1\right)^2+3}{2y^2}}$.

Úloha 8 $x\neq 0$; $x\neq\sqrt{\dfrac{3}{13}}$; $y\neq 0$

Úloha 9 $\left(y\rangle 0\wedge y-2x\rangle 0\right)\vee\left(y\langle 0\wedge y-2x\langle 0\right)$

Úloha 10 $x\neq\pm 2y$

4 Využití rovnic a nerovnic při řešení fyzikálních úloh

V této kapitole se naučíte:

- aplikovat řešení kvadratických rovnic pomocí diskriminantu na fyzikální úlohy;
- matematicky zapisovat nerovnice ve fyzikálních úlohách;
- zvolit nejvhodnější metodu řešení soustavy lineárních rovnic a nerovnic;
- řešit logaritmické a exponenciální rovnice vyjadřující vztahy mezi fyzikálními veličinami.

Klíčová slova kapitoly: ***kvadratická rovnice; diskriminant; soustava lineárních a nelineárních rovnic; nerovnice; logaritmická a exponenciální rovnice; kořen rovnice.***

Čas potřebný pro prostudování kapitoly: 2 hodiny

Lineární rovnice a jejich soustavy jste se naučili řešit na základní škole. Některá pravidla jsem uvedl v předcházející kapitole a při studiu matematiky na gymnáziu si použití ekvivalentních úprav při řešení rovnic zopakujete. V této kapitole se chci věnovat takovým soustavám rovnic a nelineárním rovnicím, se kterými se budete celkem pravidelně setkávat ve fyzice. Důležité je matematický výsledek úlohy správně fyzikálně interpretovat, tj. vysvětlit (viz následující řešené úlohy č. 13 až 20).
Téměř všechny fyzikální úlohy vedou k řešení pomocí rovnice nebo soustavy rovnic. Výhoda takových úloh je v tom, že si můžete jednoduše udělat zkoušku dosazením kořene, tj. výsledku výpočtu, do zadání. Vyjde-li zkouška, ihned víte, že výpočet je **matematicky** správný. Výsledek ale nemusí být správný fyzikálně, vždy je třeba ho v odpovědi interpretovat.

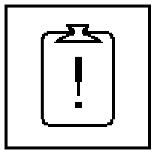
4.1 Kvadratické rovnice

Kvadratická rovnice je každá rovnice s neznámou x, která se dá pomocí ekvivalentních úprav převést do tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, kde a je kvadratický člen, b lineární člen a c absolutní člen. Pokud je kvadratický člen roven nule, rovnice přechází v rovnici lineární $bx + c = 0$.
Pokud je buď absolutní člen, nebo lineární člen roven nule, nemusím rovnici řešit pomocí vzorce s diskriminantem, který má po úpravě tvar:

diskriminant

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, kde odmocnina $\sqrt{b^2 - 4ac}$ je diskriminant, ale vystačí mi vytýkání a rozklad na součin.

Průvodce
Žáci často řeší pomocí diskriminantu i neúplné kvadratické rovnice, což je zbytečné. Vytýkání a úpravy na součin jsou jednodušší. V příkladech, ve kterých budete dosazovat do vztahu pro výpočet kořenů, si dávejte při dosazování velký pozor na znaménka.



Řešená úloha 13

V jaké výšce nad povrchem Země působí na těleso desetkrát menší gravitační síla než na povrchu Země?

$R_z = 6\ 378 \cdot 10^3$ m
$F_g : F_g(h) = 10 : 1$

Řešení:

Podle Newtonova gravitačního zákona je velikost gravitační síly působící na těleso umístěné na povrchu Země:

$$F_g = G\frac{mM_z}{(R_z)^2} \quad \text{a} \quad F_g(h) = G\frac{mM_z}{(R_z+h)^2}$$ ve výšce h nad povrchem.

Ze zadání vyplývá, že hodnota poměru mezi silami je rovna 10:

$$F_g : F_g(h) = 10 : 1 \Rightarrow$$

$$\frac{F_g}{F_g(h)} = \frac{G\frac{mM_z}{(R_z)^2}}{G\frac{mM_z}{(R_z+h)^2}} = \frac{\frac{1}{(R_z)^2}}{\frac{1}{(R_z+h)^2}} = \left(\frac{R_z+h}{R_z}\right)^2 = 10.$$

Nyní upravím matematický výraz a obdržím kvadratickou rovnici, kterou vyřeším pomocí vzorce s diskriminantem:

$$\left(\frac{R_z+h}{R_z}\right)^2 = 10$$

$$h^2 + 2hR_z + R_z^2 = 10R_z^2$$

$$h^2 + 2hR_z - 9R_z^2 = 0$$

$$h_{1,2} = \frac{-2R_z \pm \sqrt{4R_z^2 + 4 \cdot 9R_z^2}}{2}$$

$$h_{1,2} = -R_z \pm \sqrt{10}R_z$$

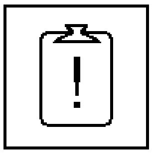
$$h_1 = R_z(\sqrt{10} - 1)$$

$$h_2 = -R_z(\sqrt{10} + 1).$$

První řešení je číselně rovno h_1 = 7 953 km. Umístíme-li těleso do této výšky nad povrch Země, bude na něj působit desetkrát menší gravitační síla než na povrchu naší planety.

Druhé řešení je číselně rovno h_2 = -15 309 km. Vzdálenost od povrchu ale nikdy nemůže být záporná. Ani v případě, že bychom těleso umístili pod povrch Země. Proto úloha má jen jedno řešení, i když matematicky existují řešení dvě!

Řešená úloha 14



Těleso jelo počáteční rychlostí 5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ a zrychlovalo se zrychlením a = 0,15 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Za jak dlouho urazí 130 metrů?

$v_0 = 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$a = 0{,}15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$s = 130$ m

$t = ?$

Řešení:
Dráha, kterou těleso urazí při rovnoměrně zrychleném pohybu, je popsána rovnicí:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

kde v_0 je počáteční rychlost, a je zrychlení a t čas. V příkladech, kdy neznámá je čas, je rovnice kvadratická s kvadratickým členem $\frac{1}{2}a$, lineárním v_0 a absolutním s. Proto:

$$\frac{1}{2} a t^2 + v_0 t - s = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} a(-s)}}{2 \cdot \frac{1}{2} a} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2as}}{a}$$

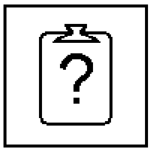
$$\{t_{1,2}\} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 39}}{0{,}15}$$

$$t_1 = \frac{-5 + \sqrt{25 + 39}}{0{,}15}\ \mathrm{s} = 20\ \mathrm{s}$$

$$t_2 = \frac{-5 - \sqrt{25 + 39}}{0{,}15}\ \mathrm{s} = -\ 86{,}\overline{6}\ \mathrm{s}.$$

Úloha má jediné řešení t_1 = 20 s. Těleso potřebuje 20 sekund, aby urazilo 130 metrů. Řešení t_2 = - 86,7 s je sice matematicky správné, ale nemá fyzikální smysl.

Úloha 11

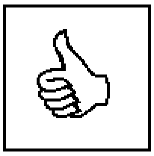


Těleso bylo vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí 72 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Za jakou dobu bude ve výšce a) patnáct metrů, b) 50 metrů?
(Řešení úlohy je na straně 34.)

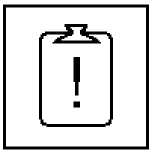
4.2 Lineární nerovnice

Fyzikální úlohy řešené pomocí lineárních nerovnic vyžadují nejen správný výpočet, ale i úvahu. Obecně úlohy řešené pomocí lineárních nerovnic patří mezi jednoduché

fyzikální úlohy; všechny „nástrahy“ lineárních nerovnic, jak je znáte z matematiky, nebývají ve fyzice uplatněny.
Lineární nerovnice s neznámou x lze vždy po úpravě zapsat ve tvaru $ax + b > 0$, kde a a b jsou konstanty. Pro zápis jsem použil znaménko nerovnosti „je větší“, ale v zápise může být i „*je menší*“, „*je menší nebo rovno*“ a nebo „*je větší nebo rovno*“.



Průvodce
Využití jiných než lineárních nerovnic, tj. kvadratických, logaritmických, exponenciálních atd., není ve výuce gymnaziální fyziky časté. Protože úlohy řešené pomocí složitějších nerovnic jsou řazeny do učiva fyzikálního semináře, nebudu se jimi v této opoře zabývat.



Řešená úloha 15
Na dno válcové nádoby může působit tlak 50 kPa. Jakou kapalinu můžete do nádoby nalít, jestliže její výška je 1 metr?

$h = 1$ m
$p = 50$ kPa $= 5\cdot10^4$ Pa
$g = 9{,}81\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
$\rho = ?\ \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

Řešení:
V zadání úlohy je otázka, jakou kapalinu může do nádoby nalít. V mechanice patří mezi nejzákladnější charakteristiky kapalin jejich hustota ρ.
Tlak, který vydrží dno nádoby, je hydrostatický. Hydrostatický tlak je definován jako součin hustoty kapaliny, výšky kapaliny v nádobě a tíhového zrychlení:

$$p_h = h\rho g.$$

Protože výšku kapaliny v nádobě a tíhové zrychlení měnit nemůžeme, je hustota kapaliny jediná proměnná na pravé straně rovnice. Hustota musí být maximálně taková, aby tlak na dno byl 50 kPa:

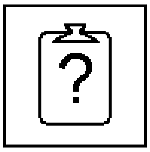
$$p_h > h\rho g,\text{ takže:}$$

$$\rho \le \frac{p_h}{hg}$$

$$\{\rho\} \le \frac{5\cdot10^4}{9{,}81}$$

$$\rho = 5\,096{,}84\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

Do nádoby můžeme až po okraj nalít kapaliny, jejichž hustota je menší než $5\,096{,}84\ \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, tj. například vodu a líh, ale ne rtuť.



Úloha 12
Těleso je položeno na nakloněné rovině s úhlem 30°. Jaká musí být minimální hodnota součinitel smykového tření stykových ploch tělesa a povrchu nakloněné roviny, aby těleso zůstalo v klidu?
(Řešení úlohy je na straně 34.)

4.3 Soustavy rovnic

Při řešení fyzikálních úloh se vám často stane, že úlohu budete chtít řešit s použitím správného vztahu, ale budete mít více neznámých. v takových případech musíte využít i další vztahy popisující danou situaci.
Z pohledu matematiky se jedná o řešení úlohy pomocí soustavy rovnic. Soustava dvou **lineárních rovnic** o dvou neznámých se vždy dá převést do tvaru:

soustavy lineárních rovnic

$$ax + by = 0$$
$$cx + dy = 0,$$

kde *a*, *b*, *c* a *d* jsou konstanty.

metody řešení soustav rovnic

Nejjednodušší je vyjádřit jednu z neznámých z jedné rovnice a dosadit upravený výraz do druhé rovnice. Obecně je jedno, ze které rovnice a kterou neznámou vyjádříte. V praxi si vybírejte takový postup, který je z hlediska výpočtu nejsnazší. Popsaná úprava odpovídá **dosazovací metodě řešení soustavy rovnic** (viz *Řešená úloha 16*).
Budou-li se rovnat pravé strany rovnic, musí se rovnat i strany levé. Zapište je proto do rovnosti a využijte tak **metody srovnávací**.
Třetí výpočtová metoda řešení soustavy rovnic je **metoda odčítací**. Jak název napovídá, odčítáme od sebe levé a pravé strany rovnic.

Ve složitějších případech musíte využít některou z metod řešení soustavy rovnic v kombinaci s dalšími algebraickými postupy. Často budete dělit levé a pravé strany rovnic nebo je od sebe odčítat. Zvolit nejvýhodnější postup může být obtížné a často to závisí na vašich zkušenostech.

Průvodce
U soustav lineárních i nelineárních rovnic musí vždy platit, že všechny fyzikálně správné postupy řešení, ve kterých nejsou výpočtové chyby, musí vést ke správnému výsledku!
Popis rozvětvených obvodů pomocí Kirchhoffových zákonů je pro učitele vždy „lahůdka“. Někdy se stane, že u patnácti žáků musím prověřit správnost i deseti různých postupů. Všechny mohou být správné.

Řešená úloha 16

Těleso se pohybovalo na začátku pohybu rychlostí 10 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ a rovnoměrně zrychlilo na 25 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ při konstantním zrychlení 1 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Jakou dráhu při zrychlování urazilo?

$v_0 = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$v = 25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$a = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$s = ?\ \text{m}$

Řešení:

Rovnoměrně zrychlený pohyb popisují vztahy pro dráhu a rychlost:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2,$$
$$v = v_0 + at,$$

kde t je čas, v_0 je počáteční rychlost a a je zrychlení. V této soustavě rovnic jsou neznámé čas t a dráha s. Mnoho žáků nejprve čas vyjádří číselně a číslo dosadí do rovnice dráhy. Fyzikálně korektnější je ale vyjádřit čas z druhé rovnice obecně a tento výraz dosadit do rovnice první:

$$v = v_0 + at \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$$
$$s = v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 \Rightarrow$$
$$s = \frac{1}{2a}\left(v^2 - v_0^2\right).$$

Číselně:

$$\{s\} = \frac{1}{2}(625 - 100)$$
$$s = 262{,}5\ \text{m}.$$

O správnosti výpočtu se můžeme přesvědčit jednoduchým dosazením do vztahů.

Řešená úloha 17

Dvě dokonale pružné koule o hmotnostech 1 kg a 3 kg se pohybovaly stejným směrem po jedné přímce a srazily se. Jejich rychlosti před srážkou byly 2 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ a 3 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Určete jejich rychlosti po srážce.

$m_1 = 1\ \text{kg}$

$m_2 = 3\ \text{kg}$

$v_{01} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_{02} = 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$v_1 = ?\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_2 = ?\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Řešení:

Změnila se rychlost koulí, ale celková hybnost a energie se nezměnila. Platí zákon zachování hybnosti: $m_1 v_{01} + m_2 v_{02} = m_1 v_1 + m_2 v_2$ (1)

a zákon zachování energie: $\frac{1}{2}m_1v_{01}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{02}^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2.$ (2)

Po úpravě: $m_1v_{01}^2 + m_2v_{02}^2 = m_1v_1^2 + m_2v_2^2.$

Vztahy (1) a (2) vytváří soustavu dvou rovnic o dvou neznámých v_1 a v_2. Obě rovnice přepíšu do takového tvaru, aby na levých stranách rovnic byly hmotnosti m_1 a na pravých stranách hmotnosti m_2:

$$m_1v_{01} - m_1v_1 = m_2v_2 - m_2v_{02}$$

$$m_1v_{01}^2 - m_1v_1^2 = m_2v_2^2 - m_2v_{02}^2$$

a vydělím levé a pravé strany:

$$\frac{v_{01} - v_1}{v_{01}^2 - v_1^2} = \frac{v_2 - v_{02}}{v_2^2 - v_{02}^2}$$

$$\frac{1}{v_{01} + v_1} = \frac{1}{v_2 + v_{02}}$$

$$v_2 + v_{02} = v_{01} + v_1$$

$$v_1 = v_2 + v_{02} - v_{01}.$$

Rychlost v_1 dosadím do zákona zachování hybnosti (1):

$$m_1v_{01} + m_2v_{02} = m_1(v_2 + v_{02} - v_{01}) + m_2v_2$$

$$v_2 = \frac{2m_1v_{01} + m_2v_{02} - m_1v_{02}}{m_1 + m_2}$$

$$\{v_2\} = \frac{4 + 9 - 3}{4}$$

$$v_2 = 2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

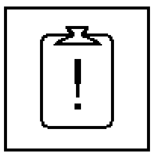
$$v_1 = 3{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Rychlost koulí po srážce byla 3,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ a 2,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Možných metod řešení je několik. Využití metody dosazovací ihned po sepsání soustavy rovnic by vedla ke složité kvadratické rovnici.

Některé fyzikální veličiny mohou být ve vztahu uvedeny i ve vyšší mocnině (například rychlost u nerovnoměrných pohybů), řešíme ve fyzice i **soustavy nelineárních rovnic**. Nejčastěji budete pracovat s jedním nelineárním vztahem a jedním nebo několika pomocnými lineárními vztahy. Proto neznámé z nich vyjádřete a dosaďte do „*hlavního*“ vztahu (viz *Řešená úloha 18*).

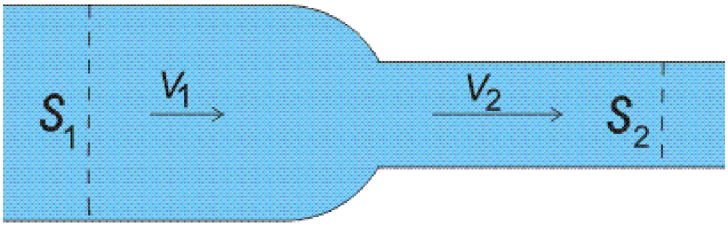
soustavy nelineárních rovnic

Řešená úloha 18



Ve vodovodu o plošném obsahu 4 dm^2 proudí voda rychlostí 2 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ při tlaku 150 kPa. Určete rychlost a tlak vody ve zúženém průřezu o obsahu 90 cm^2.

$S_1 = 4\ \mathrm{dm}^2 = 0{,}04\ \mathrm{m}^2$
$S_2 = 90\ \mathrm{cm}^2 = 9\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^2$
$v_1 = 2\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
$p_1 = 150\ \mathrm{kPa} = 15\cdot 10^4\ \mathrm{Pa}$
$v_2 = ?\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
$p_2 = ?\ \mathrm{Pa}$



Průvodce
Uvedená úloha charakterizuje hydromechaniku, tj. mechaniku kapalin. Proudící kapalinu v ní popisujeme pomocí Bernoulliovy rovnice, která vyjadřuje zákon zachování energie pro proudící kapalinu, a rovnice kontinuity (též spojitosti toku).
Obě rovnice jsou uvedeny v řešení následující úlohy. Jedinou jednoduchou metodou řešení této soustavy rovnic je vyjádřit z rovnice spojitosti rychlost v_2 ve zúženém průřezu potrubí a dosadit ji do Bernoulliovy rovnice. Snažte se v podobných úlohách nejprve řešit obecně a číselné hodnoty dosazujte až do finálního vyjádření (viz kapitola *1 Formální zpracování fyzikální úlohy*).

Řešení:

Bernoulliova rovnice: $\frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 + p_2$

Rovnice spojitosti toku: $S_1 v_1 = S_2 v_2$.

Jak je uvedeno již v *průvodci*, do Bernoulliovy rovnice dosadíme vyjádření rychlosti v_2, kterou vypočítáme:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2}$$

$$\frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{S_1 v_1}{S_2}\right)^2 + p_2$$

$$p_2 = \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + p_1 - \frac{1}{2}\rho\left(\frac{S_1 v_1}{S_2}\right)^2$$

$$\{p_2\} = \frac{1}{2}\cdot 1000\cdot 2^2 + 150000 - \frac{1}{2}\cdot 1000\cdot\left(\frac{0{,}04\cdot 2}{9\cdot 10^{-3}}\right)^2$$

$$p_2 = 112{,}5\ \mathrm{kPa}.$$

Rychlost v_2 můžeme dopočítat z Bernoulliovy rovnice i z rovnice spojitosti; respektive můžeme správnost výpočtu ověřit:

$$\frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 + p_2$$

$$\frac{1}{2}\rho\, v_2^2 = \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + p_1 - p_2$$

$$v_2^2 = \frac{2}{\rho}\left(\frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + p_1 - p_2\right)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(\frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + p_1 - p_2\right)}$$

$$\{v_2\} = \sqrt{\frac{2}{1000}\left(\frac{1}{2}\cdot 1000\cdot 2^2 + 150000 - 112500p\right)}$$

$$v_2 = 8{,}9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

$$v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2}$$

$$\{v_2\} = \frac{0{,}04\cdot 2}{9\cdot 10^{-3}}$$

$$v_2 = 8{,}9\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}.$$

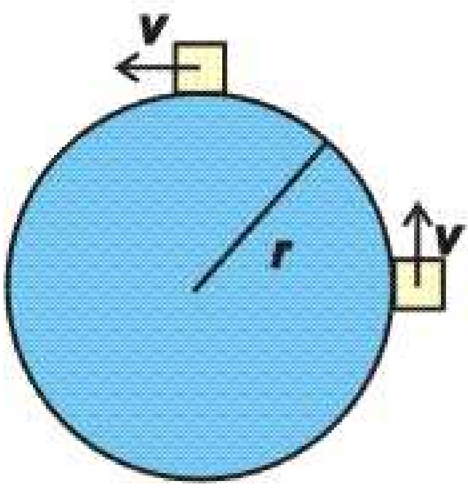
Ověření:

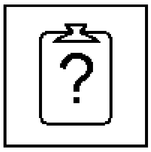
Tlak ve zúžené části trubice je 112,5 kPa a rychlost 8,9 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

<u>Úloha 13</u>

Jakou rychlost musí mít těleso, které se pohybuje po kružnici o poloměru sto metrů, aby v jejím nejvyšším bodě byla jeho tíha nulová?

(Řešení úlohy je na straně 34.)

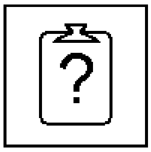




<u>Úloha 14</u>

Střela se pohybovala rychlostí 100 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ a pronikla do stromu do hloubky 12 cm. Jakou rychlostí se pohybovala střela, která pronikla do hloubky 20 cm?

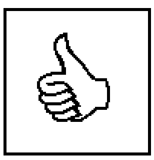
(Řešení úlohy je na straně 34.)



4.4 Exponenciální a logaritmické rovnice

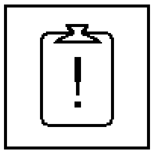
Něco navíc!

Při řešení fyzikálních úloh nevystačíte pouze se znalostí lineárních a kvadratických rovnic. Postupně se od druhého ročníku budete seznamovat i s dalšími typy rovnic. Pomocí dekadického logaritmu je v akustice popsána hladina intenzity zvuku v závislosti na intenzitě zvuku nebo v astrofyzice tzv. Pogsonova rovnice umožňující klasifikaci hvězdných magnitud. Aktivita zářiče ve fyzice mikrosvěta je zase exponenciální funkce. Exponenciální je i závislost náboje a napětí kondenzátoru na čase. Na gymnáziu se s těmito vztahy setkávají pouze žáci volitelného předmětu *Seminář a cvičení z fyziky*. V praxi se využívá i přirozený logaritmus, jehož základem je Eulerovo číslo; e = 2,71.

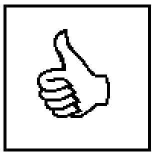


Průvodce
S úlohami řešenými pomocí složitějších matematických operací se setkáte až ve druhém a vyšších ročnících. Nejprve se musíte seznámit s potřebným matematickým aparátem, který následně využijete v praxi ve fyzice. Např. logaritmy se studují v matematice na gymnáziích už ve druhém ročníku.

Řešená úloha 19
Hladina intenzity zvuku tikajících hodinek je asi 20 dB. Motorová vozidla vydávají hladinu intenzity zvuku okolo 90 dB. Jaké zvýšení intenzity zvuku odpovídá zvýšení hladiny intenzity zvuku z 20 na 90 dB?



Průvodce
Hladina intenzity zvuku L má jednotku decibel (zkratka dB). Ucho je citlivější při nižších intenzitách zvuku, kdy i malé změny dokáže relativně přesně rozpoznat. Je proto výhodnější používat tzv. logaritmickou stupnici. Následující bod logaritmické stupnice se od předchozího liší v mocnině. Nezapisujeme např. na osu y hodnoty 0, 1, 2, 3, ... ale 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, ... což odpovídá 1, 10, 100, 1000, ...).
Platí vztah $L = 10\log\frac{I}{I_0}$, kde i je intenzita zvuku a $I_0 = 10^{-12}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$.



$L_1 = 20$ dB
$L_2 = 90$ dB
$I_0 = 10^{-12}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

$I_1 : I_2 = ?$

Řešení I.
Určím obě intenzity zvuku a vypočítám poměr těchto hodnot:

$$L_1 = 10\log\frac{I_1}{I_0} \Rightarrow 10^{\frac{L_1}{10}} = \frac{I_1}{I_0}, \qquad L_2 = 10\log\frac{I_2}{I_0} \Rightarrow 10^{\frac{L_2}{10}} = \frac{I_2}{I_0}$$

$$I_1 = I_0 10^{\frac{L_1}{10}} \qquad I_2 = I_0 10^{\frac{L_2}{10}}$$

$$\{I_1\} = 10^{-12}\cdot 10^2 \qquad \{I_2\} = 10^{-12}\cdot 10^9$$

$$I_1 = 10^{-10}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \qquad I_2 = 10^{-3}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}.$$

Řešení II.

Neznámá ve výpočtu bude poměr intenzit hlasitosti, pro který platí $\frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{I_2}{I_0}}{\frac{I_1}{I_0}}$. Obě strany rovnice logaritmuji a zároveň vynásobím 10 dB.

$$(10\text{dB})\log\frac{I_2}{I_1} = (10\text{dB})\log\frac{\frac{I_2}{I_0}}{\frac{I_1}{I_0}}$$

$$(10\text{dB})\log\frac{I_2}{I_1} = (10\text{dB})\log\frac{I_2}{I_0} - (10\text{dB})\log\frac{I_1}{I_0}$$

$$(10\text{dB})\log\frac{I_2}{I_1} = 90\text{dB} - 20\text{dB}$$

$$(10\text{dB})\log\frac{I_2}{I_1} = 70\text{dB}$$

$$\log\frac{I_2}{I_1} = 7$$

$$\frac{I_2}{I_1} = 10^7.$$

Při změně hladiny intenzity zvuku o 3,5 násobek se změní intenzita zvuku 10 000 000krát.

<u>Řešená úloha 20</u>
Určete koeficient tlumení δ kmitání, jestliže počáteční amplituda poklesne na čtvrtinu své počáteční hodnoty za 75 sekund.

t = 75 s
$y_1 = 0{,}25\, y_0$
δ = ? s^{-1}

Řešení:
Změna amplitudy tlumeného kmitání v čase je popsána vztahem: $y_1 = y_0 \text{e}^{-\delta T}$.
Odtud po úpravě a logaritmování přirozeným logaritmem:

$$\frac{y_1}{y_0} = \text{e}^{-\delta T}$$

$$\ln\frac{y_1}{y_0} = -\delta T \Rightarrow \delta = -\frac{\ln\frac{y_1}{y_0}}{T}$$

$$\{\delta\} = -\frac{\ln\frac{1}{4}}{0{,}75}$$

$$\delta = 1{,}85\text{s}^{-1}$$

Koeficient tlumení je 1,85 s^{-1}.

Úloha 15

Za jak dlouho klesne náboj kondenzátoru v RC obvodu na polovinu počáteční hodnoty? Odpor rezistoru v obvodu je 1 kΩ, kapacita kondenzátoru 50 μF.

(Poznámka: Vybíjení kondenzátoru je popsáno vztahem $Q_1 = Q_0 e^{\frac{-t}{RC}}$)

(Řešení úlohy je na této straně.)

Řešení úloh

Úloha 11 Ve výšce 15 m bude těleso za 1 s (při pohybu nahoru) a za 3 s (při pohybu zpět dolů). Výšku 50 m těleso nezíská nikdy.

Úloha 12 Složka tíhové síly rovnoběžná s povrchem roviny musí být stejně velká nebo menší než třecí síla, která je rovna součinu koeficientu smykového tření a tlakové síly (složka tíhové síly kolmá na povrch): $F_1 = f\,F_2$. Po dosazení pomocí goniometrických funkcí:

$f = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $f = 0{,}577$.

Úloha 13 Na těleso působí neustále síla gravitační a síla odstředivá. Ostatní síly, jako je například odpor vzduchu, zanedbávám. V nejvyšším bodě jsou tyto síly, které působí na těleso, stejně veliké, ale opačného směru.

$$F_{\mathrm{od}} = F_{\mathrm{g}}$$

$$m\frac{v^2}{r} = mg \Rightarrow v = \sqrt{rg}$$

$$v = 31{,}3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Úloha 14 Za předpokladu, že v obou případech působila střela na dřevo přibližně stejnou silou a obě střely měly stejnou hmotnost, platí soustava dvou rovnic (kinetická energie střely se rovná vykonané práci):

$$\begin{aligned} Fs_1 &= \frac{1}{2}mv_1^2 \\ Fs_2 &= \frac{1}{2}mv_2^2 \end{aligned}.$$

Obě rovnice jsem vydělil a vyjádřil jsem rychlost: $v_2 = 129{,}1\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Úloha 15 Pokud jste správně upravili exponenciální rovnici, víte, že platí: $t = 0{,}69\,RC$; $t = 0{,}0345$ s.

5 Grafy a tabulky ve fyzikálních úlohách

<u>V této kapitole se naučíte</u>:

- zapisovat hodnoty fyzikálních veličin do tabulek a grafů;
- získávat hodnoty fyzikálních veličin, které jsou uvedeny v tabulce nebo v grafu;
- fyzikálně a matematicky analyzovat data zadaná tabulkou nebo grafem.

<u>Klíčová slova kapitoly</u>: ***tabulka; graf; souřadnicové osy; měřítko osy; úměra; lineární funkce; kvadratická funkce.***

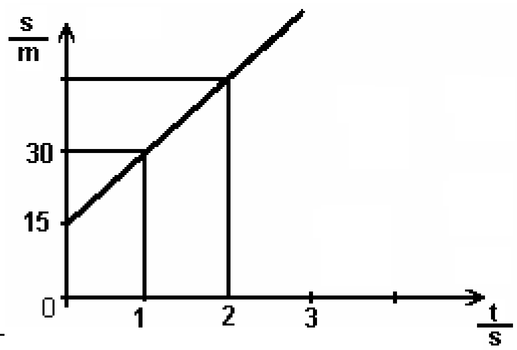
<u>Čas potřebný pro prostudování kapitoly</u>: 3 hodiny

Zpracování úlohy v podobě grafů a diagramů patří ve fyzice mezi nejčastěji používané metody. Některé úlohy jsou grafem přímo zadány, u jiných je graf nedílnou součástí postupu nebo řešení.

<u>Průvodce</u>
Grafy, se kterými se setkáváte v matematice, jsou ve své podstatě stejné jako grafy fyzikální. Pokud si to uvědomíte, předejdete mnoha problémům. V matematice se naučíte přesně znázornit průběh funkce; ve fyzice musíte umět průběh funkce popsat slovy.

5.1 Grafy v zadání úloh

<u>Řešená úloha 21</u>
Rovnoměrný přímočarý pohyb tělesa je znázorněn na grafu. Určete:
a) dráhu, kterou těleso urazí za 4 s;
b) rychlost tělesa;



Řešení:
Jednotlivé úkoly nemusíme řešit ve stejném pořadí, ve kterém jsou zadány:

ad b) Rychlost rovnoměrně přímočarého pohybu v je definována jako dráha *s*, kterou těleso urazí za určitý čas *t*. Neznáme celkovou dráhu ani celkový čas, ale z grafu mohu určit, že za první sekundu těleso urazilo patnáct metrů, protože na začátku měření bylo od pozorovatele vzdáleno patnáct metrů a za jednu sekundu už třicet metrů:

$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow \{v\} = \frac{15}{1}$$

$$v = 15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

ad a) Dráhu mohu vyjádřit z definičního vztahu pro rychlost:

$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow s = vt$$

$$s = 60 \text{ m.}$$

Těleso se pohybovalo rychlostí $15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; za čtyři sekundy urazilo 60 metrů.

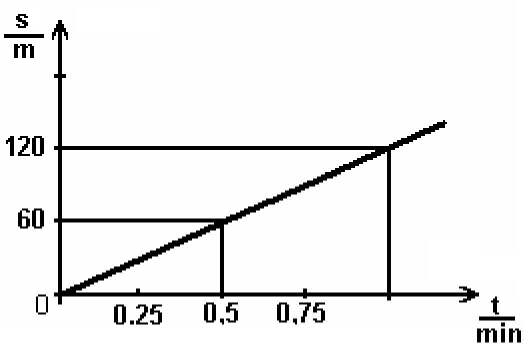
Úloha 16

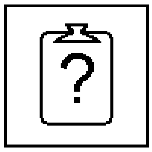
Na grafu je zaznamenán rovnoměrný pohyb tělesa. Určete:

a) dráhu, kterou těleso urazí za 90 s;

b) za jak dlouho těleso urazí 30 m?

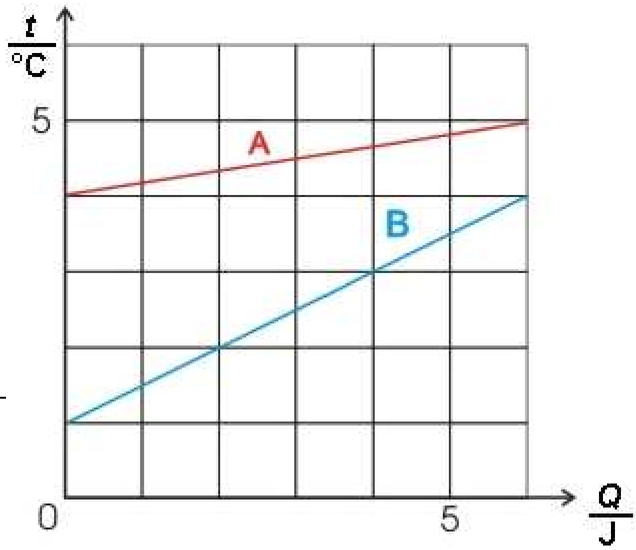
(Řešení úlohy je na straně 46.)

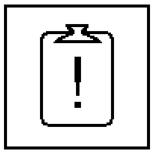




Řešená úloha 22

Na grafu je zobrazena závislost teploty dvou těles na přijímaném teple. Hmotnost obou těles je 60 gramů. Určete počáteční a koncové teploty těles. Určete měrné tepelné kapacity látek, z nichž jsou tělesa A a B zhotovena.





Řešení:

Pro práci s grafy je důležité umět je „číst“: Na vodorovné ose (osa x) je zobrazeno teplo, které tělesa A a B přijímají. Vidíme, že počátek odpovídá přijatému teplu 0 J a jeden dílek znamená přijetí tepla 1 J. Hodnoty na svislé ose (osa y) udávají změnu teploty. Z grafu vyplývá, že počátek odpovídá 0°C a jeden dílek je 1 °C.

Grafy funkcí jsou znázorněny jako dvě úsečky. To znamená, že závislosti jsou lineární a dají se matematicky obecně zapsat rovnicí y = ax + b, kde a a b jsou konstanty.

Nejprve určíme z grafu počáteční a koncové teploty. Musíme tedy najít ypsilonové souřadnice koncových bodů obou úseček. Graf tělesa a začíná v bodě, kterému odpovídá teplota t_{0A} = 4 °C; koncovému bodu odpovídá teplota t_A = 5 °C. Těleso A se zahřálo o 1 °C.

Počáteční teplota tělesa B je t_{0B} = 1 °C; koncová t_B = 4 °C. Těleso B se ohřálo o 3 °C.

Abychom mohli vypočítat měrné tepelné kapacity, musíme znát i velikost přijímaného tepla. V obou případech je Q = 6 J. Protože teplo můžeme v termodynamice vypočítat pomocí vztahu $Q = mc\Delta t$, měrné tepelné kapacity těles jsou:

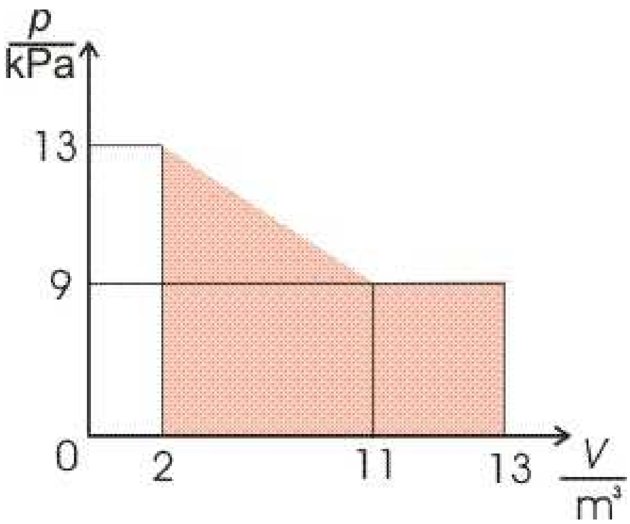
$$c_A = \frac{Q_A}{m\Delta t_A} \Rightarrow \{c_A\} = \frac{6}{0{,}06 \cdot 1};\ c_A = 100\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}\cdot\mathrm{kg}}.$$

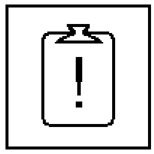
$$c_B = \frac{Q_B}{m\Delta t_B} \Rightarrow \{c_B\} = \frac{6}{0{,}06 \cdot 3};\ c_B = 33{,}3\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}\cdot\mathrm{kg}}.$$

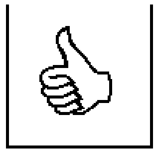
Měrné tepelné kapacity jsou $c_A = 100\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}\cdot\mathrm{kg}}$ a $c_B = 33{,}3\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}\cdot\mathrm{kg}}$.

Řešená úloha 23

Na grafu je znázorněna změna tlaku vzduchu při změně jeho objemu. Jakou mechanickou práci vzduch při popsaném ději vykonal?





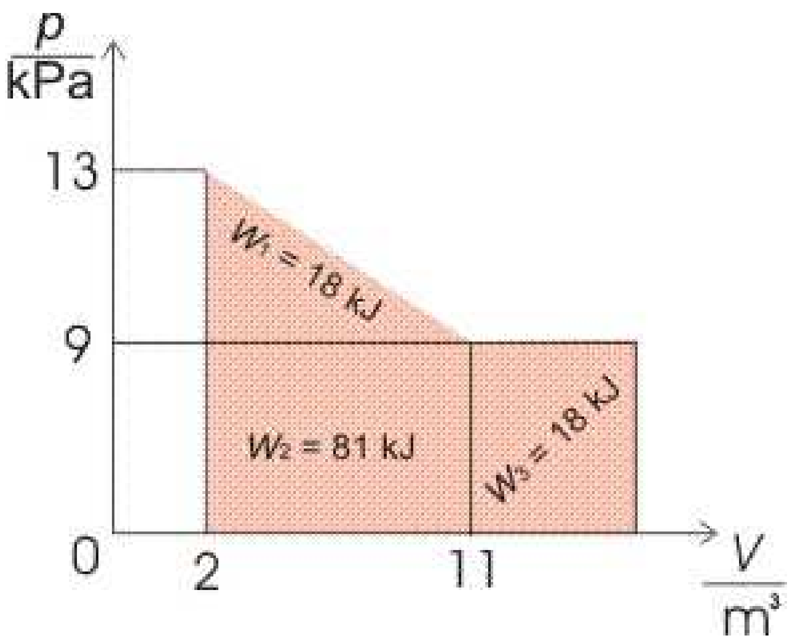


Průvodce

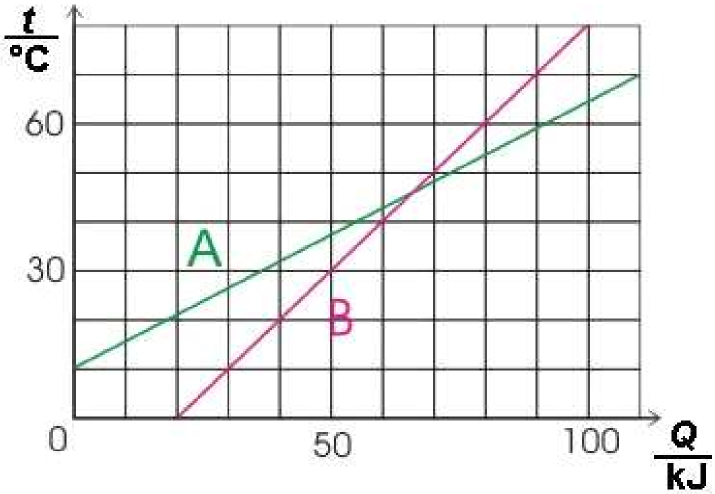
Práce plynu je při konstantním tlaku definována vztahem $W = p\Delta V$, při proměnlivém tlaku bych musel integrovat, což je složitá matematická operace. z obou případů ale vyplývá, že **práce plynu je číselně rovna obsahu plochy pod křivkou** na pracovním diagramu. Vysvětlení se dovíte ve druhém ročníku. v tuto chvíli je důležitější výpočet než jeho teoretická východiska.

Řešení:

Všechny potřebné údaje jsou zadány v grafu a ne v textu úlohy. Protože práce plynu číselně odpovídá obsahu vybarvené plochy, je řešení úlohy mnohem jednodušší, než by se mohlo podle teoretických poznatků zdát. Plochu jsem rozdělil na několik částí – trojúhelník a dva obdélníky – a jejich obsahy jsem sečetl. Proto práce vykonaná plynem je 117 kJ.



<u>**Úloha 17**</u>
Na obrázku je nakreslen graf vyjadřující změnu teploty jako funkci tepla přijatého těmito tělesy. Hmotnost obou těles je 2 kg. Určete teplo přijaté tělesy. Určete měrné tepelné kapacity látek, ze kterých jsou tělesa zhotovena.
(Řešení úlohy je na straně 46.)



5.2 Úlohy řešené pomocí grafu

Méně zkušeným žákům vždy radím, aby při řešení fyzikálních úloh maximálně používali grafy, nákresy, schémata a obrázky. Uvědomí si přitom mnoho souvislostí, které z psaného textu nemusí ihned vyplývat. s přibývajícími zkušenostmi nutnost kreslení grafů a obrázků mizí.
Při studiu fyziky se budete často setkávat i s úlohami, ve kterých je grafické znázornění některých fyzikálních veličin přímo řešením některého dílčího úkolu (viz *Řešená úloha 24*).

<u>**Řešená úloha 24**</u>

Těleso se pohybovalo tři čtvrtiny hodiny rychlostí 5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, potom 30 minut rychlostí 20 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ a nakonec 0,25 h stálo. Nakreslete a) graf závislosti dráhy na čase, b) graf závislosti rychlosti na čase. Určete průměrnou rychlost.

$t_1 = 0{,}75$ hod $= 2\,700$ s $\quad v_1 = 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$t_2 = 30$ min $= 1\,800$ s $\quad v_2 = 45\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 12{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$t_3 = 0{,}25$ hod $= 900$ s $\quad v_3 = 0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$v_\mathrm{p} = ?$

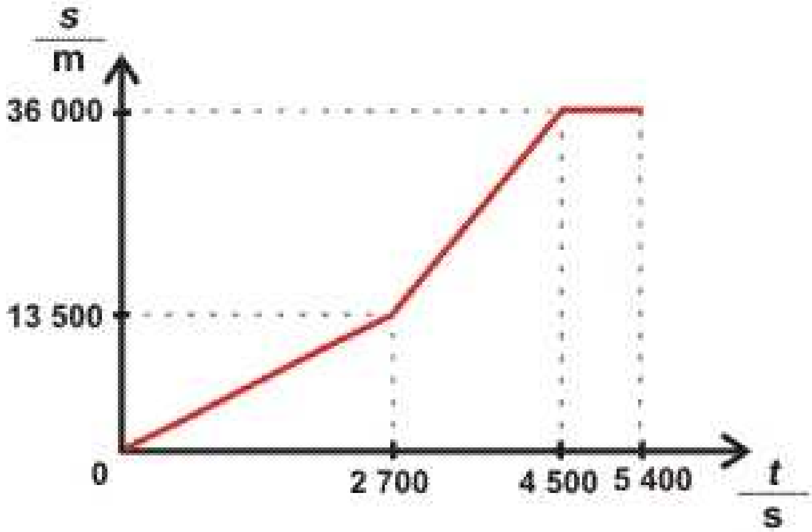
Řešení:

<u>**Průvodce**</u>
Čas zakreslujeme v grafu dráhy i rychlosti vždy na osu X. K ose je nutno připsat značku času *t* a značku jednotky. Za jednotku času si můžete zvolit sekundu, minutu nebo třeba hodinu. Nezapomeňte ale, že v různých úsecích je čas uveden v různých jednotkách, a proto musíte převádět všechny hodnoty na stejnou jednotku.
Podobně je to s jednotkami rychlosti, respektive dráhy, které znázorňujeme na osu Y. Pokud budou vaše výpočty správné, můžete si zvolit jakékoliv jednotky a nemusíte pracovat jen s jednotkami základními.
Zvolte si vhodné měřítko. v řešené úloze 24 by bylo hloupé přiřadit jedné sekundě na ose 1 cm nebo třeba decimetru 1 mm.

ad a) Graf závislosti dráhy na čase popisuje délku trajektorie tělesa vzhledem k času. Nejprve vypočtu dráhy s_1, s_2 a s_3, které těleso v jednotlivých úsecích dráhy urazilo. Dráha rovnoměrného pohybu je definována jako součin rychlosti a času: s = vt, proto:

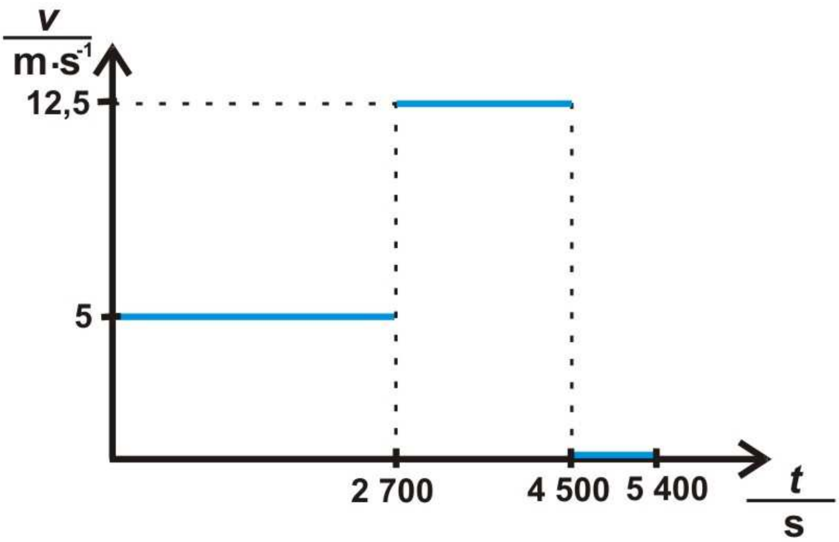
$$s_1 = v_1 t_1;\ \ s_1 = 13\,500\ \text{m};$$
$$s_2 = v_2 t_2;\ \ s_2 = 22\,500\ \text{m};$$
$$s_3 = v_3 t_3;\ \ s_3 = 0\ \text{m}.$$

Protože celkový čas je 5 400 s a celková dráha 36 000 m, mohu si zvolit odpovídající měřítko grafu:



Dráha rovnoměrného pohybu je vzhledem k času, jako proměnné, lineární funkce, kde konstantou úměrnosti je rychlost: s = $vt + s_0$. Grafem takové funkce je část přímky. V prvním úseku vychází z počátku, protože počáteční dráha s_0 je nulová. Ve druhém úseku už těleso urazilo dráhu s_1, a proto úsečka nesměřuje do počátku. Ve třetím úseku těleso stálo a dráha se nezvětšovala, byla konstantní. Grafem konstantní funkce je část přímky rovnoběžná s osou X.

ad b) Graf závislosti rychlosti na čase sestrojím podobně jako graf závislosti dráhy na čase. Potřebné hodnoty času a rychlosti v jednotlivých úsecích jsou uvedeny v zápise.



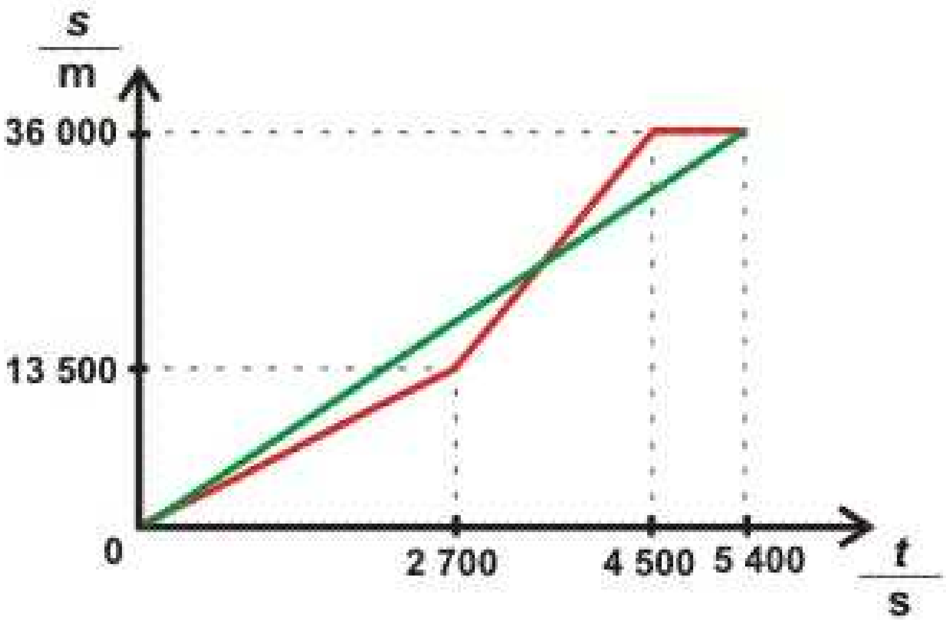
V jednotlivých úsecích se rychlost tělesa neměnila - byla konstantní. Proto jsou grafy úsečky rovnoběžné s osou X.

ad c) Průměrná rychlost je podíl celkové dráhy a celkového času. Tyto hodnoty můžeme určit výpočtem nebo z grafu:

$$v_{\mathrm{p}} = \frac{s}{t} \quad \Rightarrow \quad \{v_{\mathrm{p}}\} = \frac{3\ 6000}{5\ 400}$$

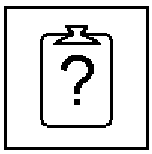
$$v_{\mathrm{p}} = 6{,}67\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Průměrná rychlost tělesa je 6,67 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.



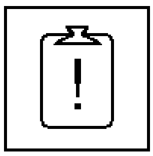
Pokud by se těleso celou dobu pohybovalo průměrnou rychlostí, muselo by urazit stejnou dráhu (viz dvě křivky na grafu).

Úloha 18



Hmotný bod se nejprve pohyboval 0,25 min rychlostí 18 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, potom urazil 27 metrů rychlostí 3 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ a nakonec 5 sekund stál. Nakreslete graf závislosti a) dráhy na čase, b) rychlosti na čase. Určete průměrnou rychlost.
(Řešení úlohy je na straně 46.)

Řešená úloha 25



Hmotný bod zrychloval dvacet sekund z klidu, až dosáhl rychlosti 8 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, potom se pohyboval 15 sekund konstantní rychlostí. Nakreslete graf závislosti a) dráhy na čase, b) rychlosti na čase.

$v_0 = 0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$v_1 = 8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$t_1 = 20$ s; $s_1 = ?$ m

$t_2 = 15$ s; $s_2 = ?$ m

Řešení:

První úsek dráhy urazil hmotný bod za 20 sekund a jeho rychlost se zvýšila za tuto dobu z nuly na osm metrů za sekundu. Jedná se o pohyb rovnoměrně zrychlený, jehož rychlost a dráha jsou určeny vztahy:

$$v = v_0 + at$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

Protože počáteční dráha a rychlost mají nulovou hodnotu, mohu vztahy zapsat ve zjednodušeném tvaru:

$$v = at$$

$$s = \frac{1}{2}at^2.$$

Abych mohl vypočítat dráhu, kterou hmotný bod urazil v prvním úseku, dosadím vyjádření zrychlení ze vztahu pro rychlost do vztahu pro dráhu (viz kapitola 4.3 *Soustavy rovnic*):

$$a = \frac{v_1}{t_1} \wedge s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 \Rightarrow s_1 = \frac{1}{2}v_1 t_1$$

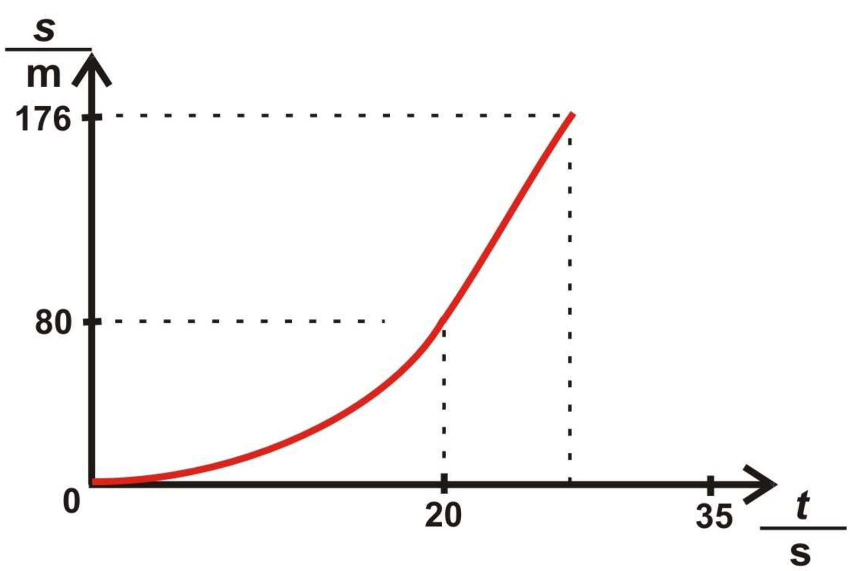
$$\{s_1\} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 20$$

$$s_1 = 80\ \text{m}.$$

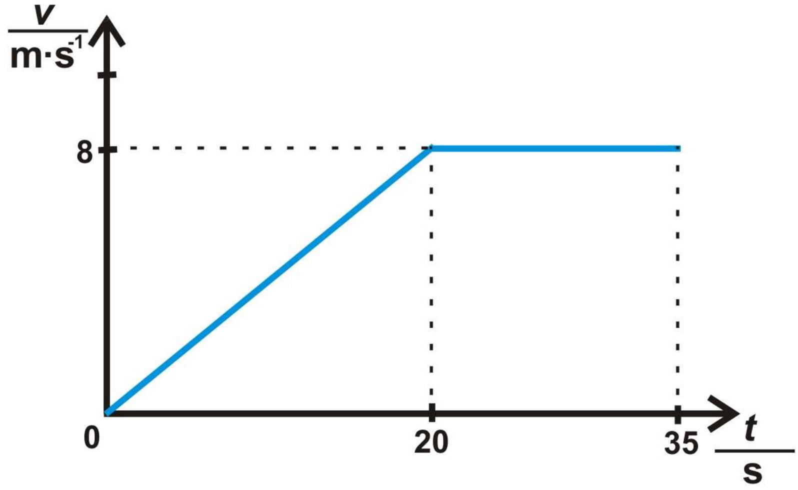
Ve druhém úseku se hmotný bod pohyboval rovnoměrným pohybem rychlostí $8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ po dobu 12 s, takže urazil dráhu $s_2 = 96$ m.

Nyní znám všechny potřebné hodnoty a mohu nakreslit hledané grafy:

ad a) Graf závislosti dráhy na čase:



V prvním úseku se stává grafem část paraboly – závislost dráhy na čase je kvadratická; ve druhém úseku je grafem část přímky, závislost dráhy na čase je lineární.
ad b) Graf závislosti rychlosti na čase:



Úloha 19

Hmotný bod se pohyboval 10 sekund konstantní rychlostí 4 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, potom rovnoměrně zpomaloval a za 8 s se zastavil. Nakreslete graf závislosti a) dráhy na čase, b) rychlosti na čase.
(Řešení úlohy je na straně 47.)

Řešená úloha 26

Jaké teplo musíme dodat 0,5 kg ledu o teplotě – 5 °C, aby roztál a voda následně vyvřela? Měrné skupenské teplo vypařování vody je 2,29 $\frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{kg}}$, měrné skupenské teplo tání ledu je 334 $\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$, tepelná kapacita vody je 4 200 $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg \cdot K}}$, měrná tepelná kapacita ledu je 2 100 $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg \cdot K}}$.

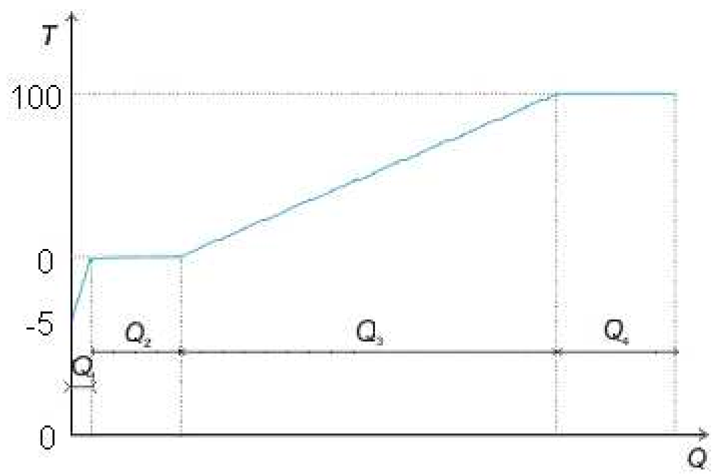
$l_1 = 334\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}} = 334 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$

$l_v = 2{,}29\ \frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{kg}} = 2{,}29 \cdot 10^6\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$

$c_1 = 2\,100\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg \cdot K}}$

$c_2 = 4\,180\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg \cdot K}}$

$m = 0{,}5$ kg
$t_1 = -5$ °C
$t_2 = 0$ °C
$t_3 = 100$ °C
$Q = ?$ J



Řešení:
Led bude postupně přijímat tyto složky tepla: teplo Q_1 na ohřátí ledu na teplotu tání, skupenské teplo tání na změnu skupenství (led taje na vodu) Q_2, teplo Q_3 na ohřátí vzniklé vody na 100 °C a skupenské teplo varu Q_4:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$$

$$Q = mc_1(t_2 - t_1) + ml_l + mc_2(t_3 - t_2) + ml_v$$

$$\{Q\} = 0{,}5 \cdot 2100 \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 334 \cdot 10^3 + 0{,}5 \cdot 4180 \cdot 100 + 0{,}5 \cdot 2{,}29 \cdot 10^6$$

$$Q = 1{,}53 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Ledu musíme dodat teplo 1,53 MJ.

Průvodce
Mnoho žáků v tomto příkladů zapomíná na všechny složky tepla, které přijímá led. Graf jim pomáhá uvědomit si, jaký děj probíhá a co se při něm děje.

5.3 Úlohy zadané tabulkou

Tabulky se využívají především v těch fyzikálních úlohách, ve kterých pracujeme se statisticky velkými soubory. Abychom nemuseli například sečítat stovky hodnot, zapíšeme je do několika intervalů a pracujeme s průměrnými hodnotami intervalů.
Součet velkého počtu hodnot se nazývá „*suma*“, značka Σ. Ve vyšší matematice nahrazuje sumu integrování.

Suma

Druhou skupinou fyzikálních úloh, ve které se budete setkávat s tabulkami, je kinematika. Pohyb těles je často vyjádřen tabulkou, která může sloužit jako pomůcka při vytváření grafu, nebo pro kontrolu jeho správnosti. *Pokuste se vytvořit tabulky k řešeným úlohám 24 a 25.*
Nemyslitelné jsou laboratorní práce bez zápisu naměřených hodnot do tabulek. Naměřené hodnoty se dále zpracovávají (průměr, suma, modus, nejvyšší a nejnižší hodnota;...) například pomocí programu MS Excel.

Řešená úloha 27

Určete střední kinetickou energii molekul kyslíku, jestliže rychlost molekul kyslíku studovaného souboru je popsán tabulkou:

rychlost molekul $\frac{v}{\text{m/s}}$	počet molekul N / %
0 - 300	17
300 - 600	38
600 - 900	36
900 a více	9

Průvodce
Střední kvadratická rychlost v_k se zavádí proto, abychom nemuseli počítat kinetickou energii všech částic samostatně. Každá částice má jinou rychlost, má i jinou kinetickou energii. Proto je potřebné najít rychlost, kterou označujeme jako *střední kvadratickou rychlost.* Kdyby ji totiž měly všechny částice systému, nezměnila by se jeho celková kinetická energie.

E_k = ? J
T = ? K

Řešení:
Střední kinetická energie je popsána vztahem, kde v_k je střední kvadratická rychlost a m hmotnost molekuly:

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_k^2$$

Střední kvadratickou rychlost musíme určit pomocí zadané tabulky. Najdeme ji z definice jako vážený průměr:

$$v_k^2 = N_1 v_1^2 + N_2 v_2^2 + N_3 v_3^2 + N_4 v_4^2$$
$$\{v_k^2\} = 0{,}17 \cdot 150^2 + 0{,}38 \cdot 450^2 + 0{,}36 \cdot 750^2 + 0{,}09 \cdot 1050^2$$
$$v_k = 618{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Za rychlosti jsme dosadili průměrnou hodnotu v daném intervalu. Střední kvadratická rychlost je důležitá pro výpočet střední kinetické energie molekul kyslíku. Hmotnost systému m je součin relativní molekulové hmotnosti M_r a atomová hmotnostní jednotka m_u:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_k^2 \wedge m = M_r m_u$$
$$E_k = \frac{1}{2} M_r m_u v_k^2$$
$$E_k = \frac{1}{2} 16 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot 618{,}5^2$$
$$E_k = 5{,}1 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{J}.$$

Střední kinetická energie molekul kyslíku je $5{,}1 \cdot 10^{-21}$ J

Řešená úloha 28
Model automobilu se při závodu rozjížděl od startovací čáry deset sekund rovnoměrně zrychleným pohybem. Doplňte tabulku:

t / s	0	2	4	6	8	10
s / m				3,6		
v / $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$			0,8			
a / $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$					0,2	

Řešení:
Dráha s a rychlost *v* rovnoměrně zrychleného pohybu jsou při nulové počáteční rychlosti popsány vztahy:

$$s = \frac{1}{2}at^2; \quad v = at,$$ kde *a* je zrychlení a *t* čas.

Protože zrychlení *a* je při rovnoměrně zrychleném pohybu konstantní, mohu do všech políček čtvrtého řádku tabulky napsat stejnou hodnotu, jaká je zapsaná pro čas *t* = 8 s:

t / s	0	2	4	6	8	10
s / m				3,6		
v / $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$			0,8			
a / $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	**0,2**	**0,2**	**0,2**	**0,2**	**0,2**	**0,2**

Pomocí vztahu pro rychlost (součin času a zrychlení) doplním po jednoduchém výpočtu i hodnoty velikosti rychlosti.

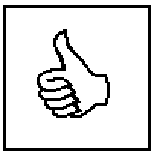
t / s	0	2	4	6	8	10
s / m				3,6		
v / $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	**0**	**0,4**	**0,8***	**1,2**	**1,6**	**2**
a / $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

Podobně postupuji při výpočtu dráhy, která je definována vztahem $s = \frac{1}{2}at^2$:

t / s	0	2	4	6	8	10
s / m	**0**	**0,4**	**1,6**	**3,6***	**6,4**	**10**
v / $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	0	0,4	0,8*	1,2	1,6	2
a / $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

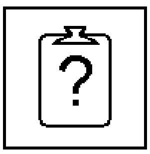
* tyto hodnoty byly v tabulce předepsány a zároveň jsou shodné s hodnotami vypočtenými. To dokazuje, že výpočet byl správný.

Průvodce
Pokud by nebyla udána hodnota zrychlení, musel bych ji ze vztahů pro rychlost a dráhu vyjádřit (viz kapitola 3 *Základní matematické postupy - úprava výrazů*). Některé hodnoty mohu vypočítat dosazením vyjádření jedné neznámé do druhého vztahu (viz kapitola 4.3 *Soustavy rovnic*).



Úloha 20

Vlak se rozjížděl 15 min rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením 0,04 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ a potom jel 30 minut konstantní rychlostí. Doplňte tabulku:



t / min	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
s / km	0									
v / $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	0									

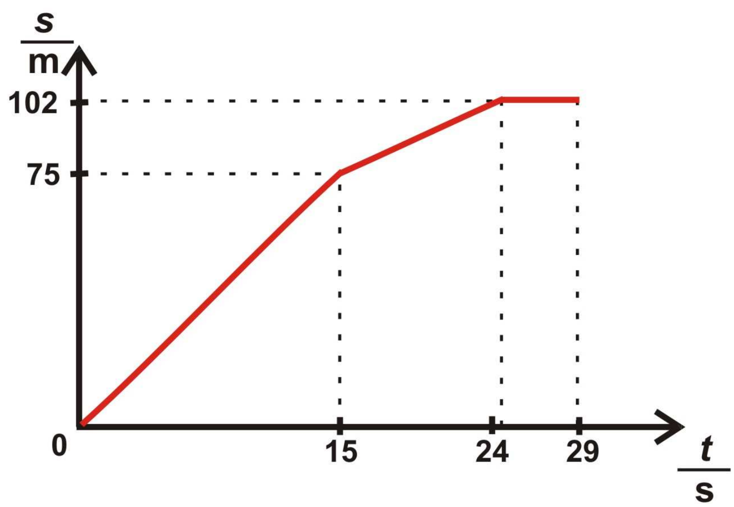
(Řešení úlohy je na straně 47.)

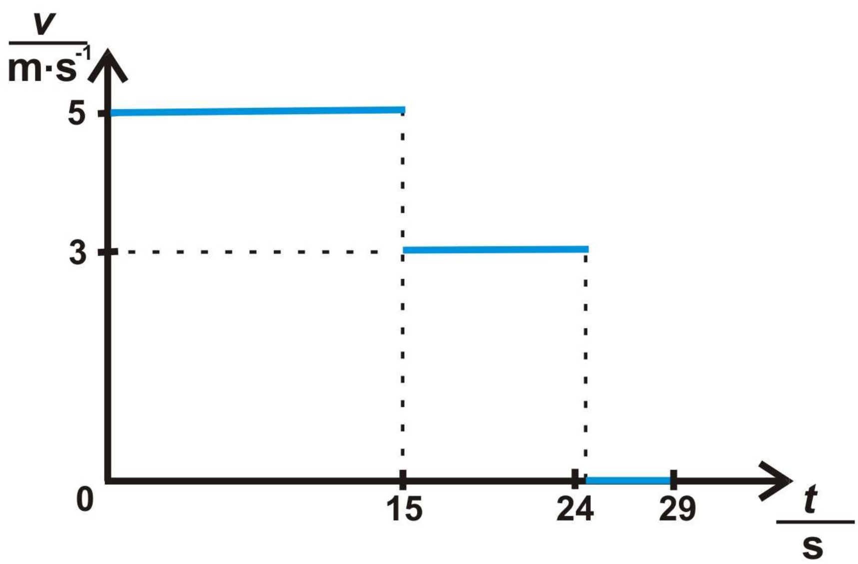
Řešení úloh

Úloha 16 Protože těleso za 0,5 min urazí 30 m, jeho rychlost je 2 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Za devadesát sekund urazí 180 metrů; 30 metrů urazí za 15 sekund.
Pozor: Čas je na ose X uveden v minutách!

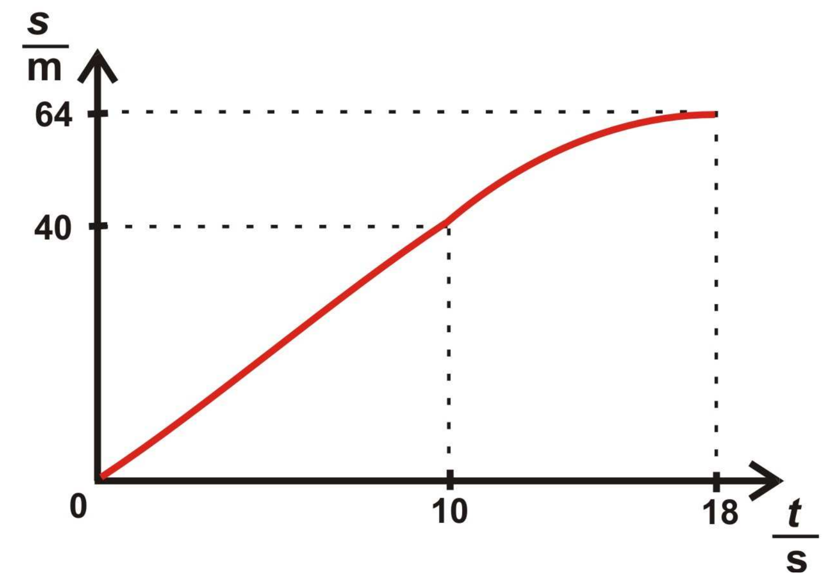
Úloha 17 Tepla přijatá tělesy jsou: Q_A = 110 kJ a Q_B = 80 kJ a jejich měrné tepelné kapacity $c_A = 916{,}7\ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ a $c_B = 500\ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.
Pozor: Grafy vyjadřující závislost změny teploty těles na přijatém teple nevycházejí z počátku!

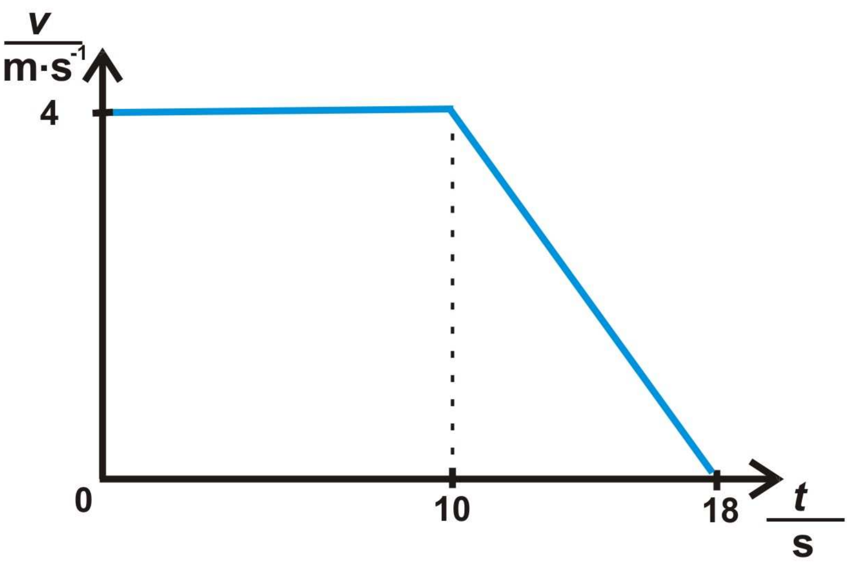
Úloha 18 První úsek trval 15 sekund a těleso urazilo 75 metrů, takže jeho rychlost byla 5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$; druhý úsek trval 9 sekund a těleso urazilo 27 metrů (rychlost byla 3 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$). Nakonec těleso bylo 5 sekund v klidu:





Úloha 19 Těleso se nejprve pohybovalo rovnoměrným přímočarým pohybem a za 10 sekund urazilo 40 metrů, potom zpomalovalo a za 8 sekund urazilo dalších 24 metrů:





Úloha 20

t / min	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
s / km	0	1,8	7,2	16,2	27	37,8	48,6	59,4	70,2	82
v / $\frac{m}{s}$	0	12	24	36	36	36	36	36	36	36

6 Práce s vektory a goniometrickými funkcemi

<u>V této kapitole se naučíte</u>:

- vytvářet grafické rozbory fyzikálních úloh;
- skládat a rozkládat vektorové fyzikální veličiny;
- pracovat s goniometrickými funkcemi a používat je ve fyzikálních úlohách;
- využívat další matematické poznatky, jako jsou vlastnosti podobných trojúhelníků a Pythagorova věta.

<u>Klíčová slova kapitoly</u>: *vektorová fyzikální veličina; skalární fyzikální veličina; skládání a rozklad vektorů; výsledný vektor; složka vektoru; goniometrické funkce; Pythagorova věta; podobnost trojúhelníků.*

<u>Čas potřebný pro prostudování kapitoly</u>: *2,5 hodiny*

Využívání obrázků a grafické rozbory jsou při řešení fyzikálních úloh běžné a často nutné. Neobejdete se bez základních znalostí planimetrie, tj. geometrie v rovině, jako jsou například práce s trojúhelníkem a s úhly, goniometrie a vektorové algebry.

Geometrie v prostoru se nazývá stereometrie. Ve fyzice se budete setkávat s trojúhelníky, čtyřúhelníky a úhly. Víte již, že úhlopříčky v kosodélníku jsou na sebe kolmé, co jsou vrcholové úhly a kdy jsou k sobě kolmé dvě kružnice? Pokud ne, musíte základy stereometrie nejprve nastudovat.

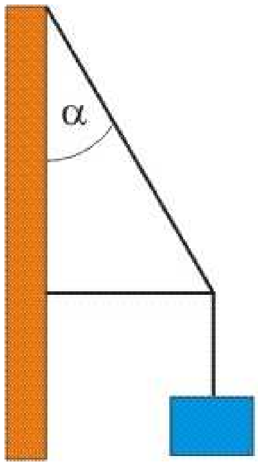
vektor a skalár

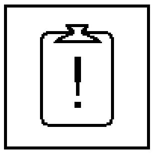
Všechny fyzikální veličiny můžeme rozdělit na skalární a vektorové. u skalárních veličin, tzv. *skalárů*, nás zajímá pouze jejich velikost. Příkladem skalárních veličin je teplota, hmotnost, čas, teplo nebo elektrický odpor. Naproti tomu u vektorových veličin, tzv. *vektorů*, je nutné znát nejen jejich velikost, ale i směr, kterým působí, a působiště. Mezi vektorové fyzikální veličiny patří okamžitá rychlost, síla, hybnost, moment síly, elektrická intenzita a magnetická indukce.
Při práci se skaláry jsou výpočty jednoduché. Sčítáme-li dvě hmotnosti, jejich součet je vždy jasný. U vektorů ale nemusí platit, že „*jedna a jedna jsou vždy dvě*“. Jestliže gravitační síla působící na těleso má velikost 1 N a vy budete toto těleso zvedat ve svislém směru silou o velikosti 1 N, bude výsledná síla působící na těleso nulová. Jedna a jedna skutečně nejsou dvě.
V této kapitole se seznámíte skutečně jen s nejzákladnějším uplatněním práce s vektory při řešení fyzikálních úloh. Tato problematika se studuje v průběhu celého prvního ročníku a je detailně popsána v učebnicích mechaniky a v přehledech fyzikálních poznatků.
Vektorové veličiny můžeme sčítat, odčítat, násobit skalárem i vektorem. Vektor můžeme rovněž rozložit na jeho jednotlivé složky atd.

<u>Průvodce</u>
Žáci často mezi vektory řadí i elektrický proud a tlak. Je to dáno tím, že v souvislosti s těmito veličinami se o směru hovoří také. Jenomže směr elektrického proudu je omezen parametry obvodu a nedá se na něj aplikovat vektorová algebra. „*Směr*“ tlaku zase souvisí s působící tlakovou silou a může být velmi neurčitý – například v kapalinách působí tlak vyvolaný vnější silou všemi směry. **Tlak a elektrický proud nejsou vektorové veličiny!**

Řešená úloha 29

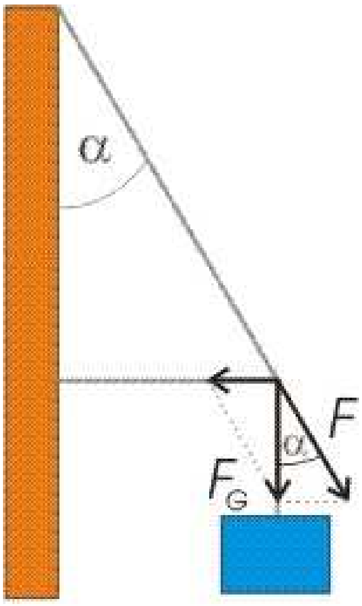
Těleso o hmotnosti 5 kg bylo zavěšeno u stěny lanem pomocí vodorovného trámu. Lano svírá v místě nad trámem se svislou stěnou úhel 40°. Jakou silou je napínáno?





m = 5 kg
α = 40°
F = ? N
$g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Řešení:



Při řešení fyzikální úlohy využiji rozklad vektoru na jeho vektorové složky. Těleso působí tíhovou silou na lano. V místě styku lana s trámkem musím sílu rozložit na vodorovnou složku a složku ve směru lana nad trámem (viz obrázek). Síly $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{F_G}$ svírají úhel α. Proto mohu velikost síly $\boldsymbol{F}$ vyjádřit pomocí goniometrické funkce cosinus:

$$\cos\alpha = \frac{F_G}{F}$$

$$F = \frac{F_G}{\cos\alpha}$$

$$F = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

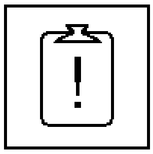
$$\{F\} = \frac{5\cdot 9{,}81}{\cos 40}$$

$$F = 64\ \text{N.}$$

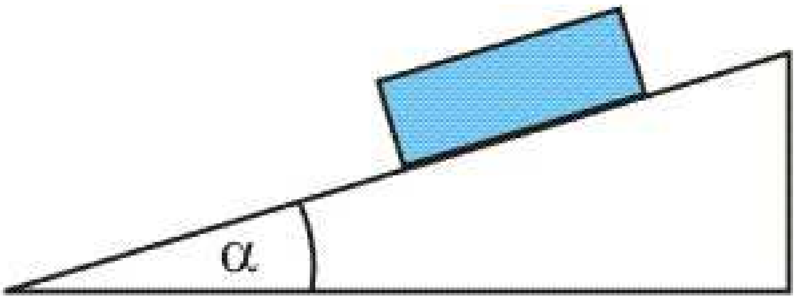
Lano bylo v místech nad trámem napínáno silou 64 N.

Řešená úloha 30

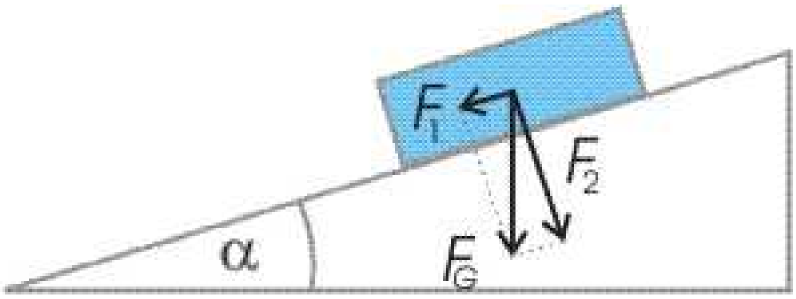
S jakým zrychlením se pohybovalo těleso, které bylo položeno na nakloněnou rovinu s úhlem 15°?



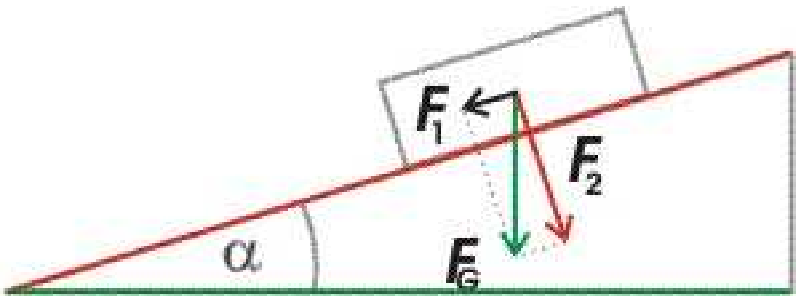
α = 15°
$g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
$a = ?\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$



Stejně jako v předchozím příkladu musíme rozložit tíhovou sílu $\boldsymbol{F_G}$ do dvou nezávislých směrů: složka $\boldsymbol{F_1}$ je rovnoběžná se směrem pohybu tělesa a složka $\boldsymbol{F_2}$ je kolmá na nakloněnou rovinu. Složka $\boldsymbol{F_2}$ síly $\boldsymbol{F_G}$ nezpůsobuje narozdíl od složky $\boldsymbol{F_1}$ pohyb.



Ze zadání a z obrázku vyplývá, že pomocí tíhové síly musíme vypočítat velikost zrychlení, které způsobuje síla $\boldsymbol{F_1}$. Podle zákona síly je velikost zrychlení $a_1 = \frac{F_1}{m}$. Na rozdíl od minulé úlohy není velikost úhlu mezi silami ihned jasná. Musím proto využít znalost vlastností úhlů: ***dva úhly jsou shodné, když jejich ramena jsou na sebe kolmá***: (na vodorovnou rovinu je kolmá tíhová síla a na „nakloněnou“ stranu je kolmá síla F_2 – viz obrázek). Úhel mezi silami F_G a F_2 je rovněž 15°.



$$\sin\alpha = \frac{F_1}{F_G}$$

$$\sin\alpha = \frac{ma_1}{F_G}$$

$$a_1 = \frac{mg\sin\alpha}{m}$$

$$\{a_1\} = 9{,}81 \cdot \sin 15$$

$$a_1 = 2{,}54\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Těleso se pohybovalo se zrychlením $2{,}54\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Všimněte si, že pro výpočet jsme nepotřebovali znát hmotnost tělesa.

Poznámky

Závěr

Fyzice se nedá naučit za dvě odpoledne. Fyzice se především musí rozumět a je důležité začít fyzikálně myslet. To je možné jen při praktickém uplatnění fyziky, například při řešení fyzikálních úloh. o to jsem se snažil v této opoře. Artisté v cirkuse žonglující s deseti balóny museli věnovat stovky hodin tréninku, aby jejich vystoupení bylo kvalitní a budilo pocit lehkosti. Možná, že fyzika je pro mnohé z vás ještě náročnější. Postavit se k problému porozumění fyzice čelem. Nikdy si neříkejte: „*To stejně nepochopím*.“ Pochopíte, když budete chtít pochopit.

Běžné učebnice fyziky jsou psány akademicky. Podrobně je vysvětlena teorie, ale řešení úloh je často jen naznačeno. Je to v pořádku, protože tuto část hodin musí řídit učitel a vysvětlit žákům základní postupy názorně a opakovaně. Ve máte ale jen velmi omezenou možnost konzultovat s pedagogy své problémy a nejasnosti. Proto jsme se rozhodli vytvořit tuto sérii pěti opor distančního vzdělávání (2x matematika, chemie, biologie), které by měly sloužit jako jakési *praktické domácí kuchařky*.

Projekt byl financován grantem z projektu Státní informační politiky ve vzdělávání v roce 2005. Opory doplňují obsah učebnic, ale nekopírují ho.

Snad se nám to podařilo a vám se podaří doplnit si vzdělání při zaměstnání. Držím vám palce.

Literatura

[1] BALNAR, Antonín. *Fyzikální praktikum I*. Ostravská univerzita. Ostrava : 2003.
ISBN: 80-7042-900-3

[2] BALNAR, Antonín. *Multimediální program Fázové přeměny*. In 7. mezinárodní konference Pedagogický software 2000, Jihočeská Univerzita České Budějovice. České Budějovice : 2000.

[3] BALNAR, Antonín. *Multimediální vzdělávací program - Meteorologie*. ICTE 2001, Ostravská Univerzita Ostrava. Rožnov pod Radhoštěm : 2001.

[4] BARTUŠKA, Karel, SVOBODA, Emanuel. *Molekulová fyzika a termodynamika*. Praha : Prometheus, 1996.

[5] BARTUŠKA, Karel. *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy II.* Praha : Prometheus, 1997. ISBN: 80-7196-034-9

[6] BARTUŠKA, Karel, SVOBODA, Emanuel. *Fyzika pro II. ročník gymnázií*. Praha : SPN, 1985.

[7] ČÁP, Jan. *Psychologie výchovy a vyučování*. Praha : Karolinum, 1997.
ISBN 80-7066-534-3.

[8] FELLER, V. *An Introductin to Probability Theory and its Applications*. Princeton, 1996.

[9] FUKA, Josef, ŠIROKÁ, Miroslava. *Cvičení z obecné fyziky I*. Olomouc : Univerzita Palackého, 1988

[10] HALLIDAY, David, RESNICK, Robert, WALKER, Jearl. *Fyzika, Vysokoškolská učebnice obecné fyziky, část 1 až 5*. Brno : Vysoké učení technické v Brně: Vutium. 2000. ISBN: 80-214-1868-0.

[11] HANZELÍK, F. a kol. *Zbierka riešených úloh z fyziky*. Bratislava : Alfa, 1989.

[12] KOUBEK, V. a kol. *Školské pokusy z fyziky*. Bratislava : Alfa, 1992.

[13] KOPEČNÝ, Jan, KOPEČNÁ, Milada. *Sbírka problémových úloh z fyziky I.* Ostrava - VŠB-TU, 1995.
ISBN: 80-7078-271-4

[14] KVASNICA, Jozef. *Matematický aparát fyziky.* Praha : Academia, 1995.
ISBN: 80-200-0088-7

[15] LEPIL, O. *Doplněk k učivu fyziky pro 8. a 9. ročník ZŠ s rozšířeným vyučováním matematice a přírodovědným předmětům*. Praha : Prometheus.

[16] MECHLOVÁ, Erika, KOŠŤÁL, Karel. *Výkladový slovník fyziky pro základní vysokoškolský kurz*. Praha : Prometheus, 1999.
ISBN: 80-7196-151-5

[17] Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy České republiky. *Učební osnovy čtyřletého gymnázia – Fyzika (povinný předmět); Seminář a cvičení z fyziky (volitelný předmět ve 3. nebo 4. ročníku – jednoleté kurzy); Cvičení z fyziky (nepovinný předmět v 1.-4. ročníku)*. Praha : Prometheus, 1994.

[18] PETTY, Geoffrey. *Moderní vyučování*. Praha : Portál, 2002.
ISBN: 80-7178-681-0

[19] PRŮCHA, Jan. *Moderní pedagogika*. Praha : Portál, 2002.
ISBN: 80-7178-631-4

[20] ŠIROKÁ, Miroslava, BEDNAŘÍK, Milan. *Metodická příručka k souboru didaktických testů pro gymnázia*. Praha : Prometheus, 1994.
ISBN: 80-85849-01-1

[21] ŠIROKÁ, Miroslava, BEDNAŘÍK, Milan. *Fyzika pro gymnázia - Mechanika*. Praha : Prometheus, 1997.
ISBN: 80-7196-068-3

[22] TOLLINGEROVÁ, Dana, KNĚZŮ, Věra, KULIČ, Václav. *Programované učení.* SPN. Praha 1966.

Řešení fyzikálních úloh

Mgr. Antonín Balnar

Ostrava 2005

Název	Řešení fyzikálních úloh
Editor	Mgr. Antonín Balnar
Vydavatel	Gymnázium, Ostrava – Poruba, Čs. exilu 669
Rozsah	56 stran
Vydání	první, 2005
Tisk	Gymnázium, Ostrava – Poruba, Čs. exilu 669
Doporučená cena	**zdarma**; vytvořeno v rámci projektu SIPVZ 2005

ISBN 80-903647-4-8