Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
příspěvková organizace

Moravskoslezský matematický šampionát 2023

Sborník

Ostrava-Poruba
19. 10. 2023

Organizační výbor

PaedDr. Antonín Balnar, Ph.D.	hlavní organizátor
Mgr. Jana Gajdušková	odborný matematický dohled

Autoři a recenzenti

RNDr. Ivana Breginová, Mgr. Lenka Dedková, Mgr. Jana Gajdušková,

Mgr. Petra Kňurová, Mgr. Lenka Hořenková Kucosová,

Mgr. Tomáš Krchňák, Mgr. Veronika Pavlíková, Mgr. Lenka Plášková,

Mgr. Pavel Skalný, Ph.D., Mgr. Lada Stachovcová,

Mgr. Marie Štípalová, RNDr. Michal Vavroš, Ph.D.

Překlad do anglického jazyka

dott. Pavel Gajdušek

Obsah

Úvodní slovo

Dvacet let. Nejsem matematik, takže se nebudu vrhat do hrátek s čísly, ani spekulovat nad kouzly *dvacítky*. Jsem humanista, to znamená, že za čísly vidím lidi, jejich osudy, práci, výdrž, motivaci, vývoj. Vidím, že při prvním ročníku nebyli dnešní soutěžící na světě, a když popustím uzdu fantazii, vidím, že jejich rodiče zřejmě ještě ani neplánovali, že je na svět přivedou. Dvacet let představuje hodnoceno ještě nedávným měřítkem celou generaci. Nabízí se napsat, že udržet soutěž při životě takhle dlouho vyžaduje oddanost a lásku k práci. Jako manažer za tím ale vidím ještě víc. Udržet úspěch dvacet let znamená umět se přizpůsobit, vyvíjet, posouvat, naslouchat a učit se. Jsem šťastný, že kromě matematiky umíme naučit naše žáky i těmto dovednostem, protože bez nich se v budoucím světě neobejdou.

Mgr. Jan Netolička
ředitel Wichterlova gymnázia

Maturity z matematiky

Anotace přednášky

V úvodu přednášky bude připomenuta historie vzniku maturitní zkoušky v Evropě, zejména v Rakousko-Uhersku, s uvedením příkladů, které byly obsahem maturitní zkoušky.

Hlavní část přednášky bude věnována současným maturitním zkouškám z matematiky v zahraničí včetně ukázek úloh z čínské národní přijímací zkoušky na vysoké školy, která je známa pod názvem Gaokao.

RNDr. Dag Hrubý
autor učebnic matematiky
bývalý ředitel Gymnázia Jevíčko

Sportovci

Zadání

Setkají se mladí sportovci Simona, Petr, Radek a Tereza. Povídají si o tom, co je u nich nového.

a) Cyklista Petr vypráví o posledním závodě: „Šlo mi to skvěle. Dlouho jsem se držel pelotonu, který jel průměrnou rychlostí 24 km/h. Ale kvůli defektu jsem musel zastavit a zdržel jsem se 2 minuty. Pak jsem ale zabral a dohonil jsem peloton za 6 minut.“

   Jakou průměrnou rychlostí jel Petr při dohánění pelotonu?

b) Plavkyně Tereza si povzdechla: „Náš tréninkový bazén se opravuje, mění se dlažba, budeme mít nové dno. Staré obdélníkové dno je složeno z 1 040 dlaždic, každá o obsahu 18,8 dm^2. Nyní se kladou nové čtvercové dlaždice o straně 4 dm.“

   Spočítejte, kolik jich bude potřeba.

c) Turistka Simona povídá o svém oddíle Mladí orli: „Náš oddíl má 18 členů. Když odejdou 3 dívky a 1 chlapec, je počet dívek a chlapců stejný.“

   Kolik je děvčat a kolik chlapců?

   „Taky vám řeknu, že součet věků všech členů oddílu je 209 let, přitom je 6 jedenáctiletých a 4 jsou dvanáctiletí. Zbývajícím je 10 nebo 13 let.“

   Kolik je 10letých a kolik 13letých členů?

d) Začínající atlet Radek má ze všech disciplín nejraději vrh koulí. Rád kamarádům vysvětluje: „Většinou trénujeme s koulí z oceli (má hustotu 7,8 g/cm^3). Koule pro kluky je větší než koule pro holky, hmotnosti jsou v poměru 3 : 2. Koule pro kluky má objem přibližně 385 cm^3.“

   Určete, jaká je hmotnost a objem koule pro děvčata.

Řešení

a)

Dráha, kterou Petr ujel za 6 minut, je stejná jako dráha pelotonu za 8 minut. Tedy platí $24 \cdot \frac{8}{60} = v \cdot \frac{6}{60}$, po úpravě $192 = 6v$, odtud dostaneme $v = 32$.

Petr tedy musel jet rychlostí 32 km/h.

b)

Vypočítáme obsah starého dna $S = 1\,040 \cdot 18{,}8 = 19\,552\,\mathrm{dm}^2$. Výsledek vydělíme obsahem jedné nové dlaždice, dostaneme $19\,552 : 16 = 1\,222$.

Na nové dno bazénu je potřeba 1 222 dlaždic.

c)

Od celkového počtu 18 členů odečteme $3 + 1$ dětí, výsledný počet 14 pak tvoří stejný počet dívek a chlapců, tedy $7 + 7$. Původní počet je tedy 10 dívek a 8 chlapců.

Sečteme-li známý věk členů, tedy $6 \cdot 11 + 4 \cdot 12$, dostaneme součet 114. Do celkového součtu 209 let chybí $209 - 114 = 95$ a zbývá 8 dětí.

Označíme-li x počet desetiletých dětí, můžeme sestavit rovnici

$$10 \cdot x + 13 \cdot (8 - x) = 95.$$

Po úpravě $104 - 3x = 95$, odtud pak $x = 3$.

V oddíle jsou 3 desetileté a 5 třináctiletých dětí.

d)

Nejprve určíme hmotnost koule pro chlapce užitím vzorce $m = \rho \cdot V$. Dostaneme $m = 7{,}8 \cdot 385$, hmotnost koule je tedy přibližně 3 003 g. Hmotnost koule pro děvčata je pak 2 002 g.

Její objem vypočítáme ze vztahu $V = m : \rho$, tedy $V = 2\,002 : 7{,}8$.

Po zaokrouhlení získáme přibližný objem koule pro děvčata $V = 257\,\mathrm{cm}^3$.

Čtyři bratři

Zadání

Ke strejdovi a tetě přijeli na prázdniny čtyři bratři Martin, Jakub, David a Vašek.

a) Teta jim na uvítanou upekla koláče a chlapci se o ně mezi sebou postupně rozdělili. Martin si vzal o jeden koláč méně, než byla třetina všech koláčů na míse, Jakub si odnesl o jeden méně, než byla třetina zbývajících koláčů. Po Jakubovi si vzal také David o jeden méně, než byla třetina zbývajících koláčů. Tetě na míse zbylo pro Vaška jedenáct koláčů. Kolik koláčů bylo původně na míse a kolik snědl každý chlapec?

b) S hochy byla legrace, ale někdy jejich rošťárny tetu a strejdu zlobily. Na zahradě dozrálo první krásné červené jablko. Teta ho položila na mísu v kuchyni, aby ho večer ukázala strejdovi. Když se chtěla jablkem pochlubit, jablko na míse nebylo. Strejda všechny bratry svolal a začal pátrat po zmizelém jablku. Chlapci odpovídali takto:

   Martin: „Jablko snědl David, nebo Vašek."
   Jakub: „Jablko schroustal Vašek."
   David: „Já jsem to jablko nesnědl."
   Vašek: „Já ho také nesnědl."

   Strejda své synovce dobře zná a ví, že tři z nich vždy mluví pravdu. Kdo ze synovců snědl jablko?

c) Jednoho dne se rozhodli, že pojedou na výlet. Tři osminy cesty jeli autobusem, jízda vlakem jim zabrala 55 % cesty a zbytek výletu šli pěšky rychlostí 4,2 km/h. Cesta pěšky jim trvala hodinu a 30 minut. Jak dlouhou cestu museli chlapci zvládnout?

d) Na dvoře u domu ležely tři hromady cihel. Poslední den návštěvy měli hoši přeskládat cihly tak, aby na každé hromadě byl stejný počet cihel. Z prvé hromady bratři přenesli na druhou hromadu tolik cihel, kolik jich už bylo na druhé. Potom z druhé na třetí tolik, kolik jich bylo na třetí, a nakonec dali z třetí hromady na prvou tolik, kolik jich tam od prvního přenesení zůstalo. Kolik cihel bylo na hromadách původně, když chlapci spočítali, že po práci bylo na každé hromadě 640 cihel?

Řešení

a)

Řešení 1

Na míse zbylo 11 koláčů. To jsou dvě třetiny těch, které zbyly před příchodem Davida, a jeden další koláč, protože si vzal o jeden méně než byla jedna třetina. Pak dvě třetiny představuje 10 koláčů, tedy před příchodem Davida jich bylo na míse 15.

Podobně 15 koláčů jsou dvě třetiny těch, které zbyly před příchodem Jakuba, a jeden další koláč. Dvě třetiny je 14 koláčů, před příchodem Jakuba jich tedy muselo být 21.

Nakonec opět odečteme jeden koláč od 21 koláčů a dostaneme dvě třetiny toho, co bylo na míse před příchodem Martina.

Tedy teta měla původně na míse 30 koláčů.

Martin si vzal 9 koláčů, Jakub 6 koláčů a David 4 koláče.

Řešení 2

Původní počet koláčů v míse označíme x.

Počet koláčů, které si vzal Martin, je $\frac{x}{3}-1$. V míse zbylo $x-\left(\frac{x}{3}-1\right)$ koláčů, což je po úpravě $\frac{2x+3}{3}$.

Jakub si vzal $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2x+3}{3}\right)-1$ koláčů. V míse zbylo $\frac{2x+3}{3}-\left(\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2x+3}{3}\right)-1\right)$.

Po zjednodušení je to $\frac{4x+15}{9}$ koláčů.

David vzal z mísy $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4x+15}{9}\right)-1$ koláčů. Na míse proto zůstalo

$$\frac{4x+15}{9}-\left(\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4x+15}{9}\right)-1\right),$$

což je po úpravě $\frac{8x+57}{27}$ koláčů.

Nyní sestavíme rovnici $\frac{8x+57}{27}=11$, která má jedno řešení $x=30$.

Tedy teta měla původně na míse 30 koláčů.

Martin si vzal 9 koláčů, Jakub 6 koláčů a David 4 koláče.

b)

Jakub a Vašek říkají dvě protichůdná tvrzení, jeden z nich tedy musí lhát. Celkem tři hoši podle strejdy jsou pravdomluvní, tedy Martin a David mluví pravdu.

Kdyby lhal Jakub, pak by podle Martina jablko snědl David, ale ten ho podle svých slov nesnědl.

Lže tedy Vašek a ten také snědl jablko.

c)

Jedna celá cesta je sto procent. Tři osminy jízdy autobusem představuje 37,5 %, jízda vlakem 55 %. Na cestu pěšky tedy připadá 7,5 % celého výletu.

Pokud se pěšky pohybovali rychlostí 4,2 km/h po dobu 1,5 h, pak museli ujít 6,3 km. (Dosadíme do vztahu $s = v \cdot t$ pro výpočet dráhy s v závislosti na rychlosti v a čase t.)

Pokud 6,3 km odpovídá 7,5 procentům cesty, pak celková vzdálenost, sto procent, je 84 km.

d)

Označme si původní množství cihel na hromadách x, y, z.

Po prvém přenesení bude na jednotlivých hromadách $x - y, 2y, z$ cihel.

Po druhém přenesení: $x - y, 2y - z, 2z$.

Nakonec po třetím přenesení: $2(x - y), 2y - z, 2z - (x - y)$ cihel.

Víme, že nakonec bylo na všech hromadách 640 cihel. Sestavíme tedy soustavu tří rovnic o třech neznámých:

$$\begin{aligned} 2(x-y) &= 640 \\ 2y - z &= 640 \\ 2z - (x-y) &= 640 \end{aligned}$$

Z druhé rovnice si vyjádříme neznámou z, $z = 2y - 640$, a dosadíme do třetí rovnice. Získáme tak soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= 640 \\ -x - 5y &= 1920 \end{aligned}$$

Vyjádříme x z druhé rovnice, $x = 5y - 1920$, a dosadíme do první.

$$8y - 3840 = 640$$

Dořešíme celou soustavu a dostáváme tak původní počet cihel na hromadách.

Na první hromadě bylo původně 880 cihel, na druhé 560 cihel a nakonec na třetí leželo 480 cihel.

Cyrilovy Star Wars

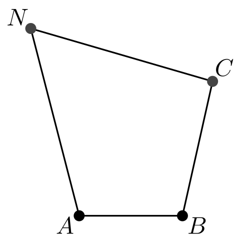
Zadání

Cyril má rád sci-fi, zejména seriál Star Wars. O prázdninách si proto začal vymýšlet svou bránu pro rychlé cestování nejen v naší Mléčné dráze, ale i na velké vzdálenosti mezi dalšími galaxiemi. Na svých cestách po vesmíru si představoval různá dobrodružství.

a) Pro první cestu po naší galaxii si vytýčil trasu s několika zastávkami. První úsek trval čtvrtinu, druhý třetinu, třetí šestinu vždy z celkové doby letu a poslední úsek trval 36 sekund. Jak dlouho by trval jeho celý let, jestliže si dobu odpočinku na každé zastávce pro rychlonabíjení kosmické lodi stanovil v délce 5 sekund?

b) Při svém druhém putování, tentokráte už mimo Mléčnou dráhu, si představil setkání s mimozemskými organismy. Vypozoroval, že přibližně za jeden den se z jednoho organismu vytvoří dva nové organismy. Za další den se z každého organismu vytvoří zase dva nové organismy a tak dále. Cyrila zajímalo, za kolik dní by takto vzniklo aspoň 2023 organismů.

c) Centrum Cyrilova vesmírného prostoru tvoří čtyři hlavní planety: Agamar, Bespin, Coruscant a Naboo. Jejich uspořádání si představil jako vrcholy čtyřúhelníku, který pojmenoval podle počátečních písmen názvů planet $ABCN$, viz obrázek.



Určil si některé vzdálenosti takto:

$$|AB| = 6 \text{ AU}, |BC| = 8 \text{ AU}, |CN| = 11 \text{ AU}, |AC| = 11 \text{ AU}, |BN| = 14 \text{ AU}$$

(AU je astronomická jednotka, přibližně 150 mil. km). Ve vnitřní oblasti tohoto čtyřúhelníku by chtěl zřídit výchozí bránu W tak, aby součet vzdáleností k jednotlivým planetám byl co nejmenší.

Najděte takovou polohu bodu W a vypočítejte součet všech vzdáleností $|WA| + |WB| + |WC| + |WN|$ z bodu W k jednotlivým planetám.

Úlohu není třeba rýsovat. Polohu výchozí brány W stačí popsat slovně s využitím výchozího obrázku.

d) Pro test správnosti fungování palubního počítače své kosmické lodi si vymyslel úlohu, aby počítač rychle sečetl 119 po sobě jdoucích přirozených čísel. V prvním testu začal číslem 10, ve druhé začal číslem 27. Při druhém testu dostal výsledek součtu samozřejmě větší. O kolik?

Řešení

a)

Dobu letu bez přestávek označme tradičně x. Pak rovnici vyjadřující dobu letu v jednotlivých úsecích lze zapsat takto:

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} + 36 = x$$

a její řešení: $\dfrac{9x}{12} + 36 = x \Rightarrow \dfrac{x}{4} = 36 \Rightarrow x = 144.$

Ke stejnému výsledku můžeme dojít i úvahou, že první tři úseky představují z celkové doby letu $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, tj. poslední 36-ti sekundový úsek odpovídá $\frac{1}{4}$ ze samotné doby letu.

Doba letu bez přestávek je tedy 144 s, k této době ještě musíme připočítat 5 s pro nabíjení v každé zastávce. Mezi čtyřmi úseky jsou tři zastávky. Doba všech nabíjení je 15 s, celkem doba letu včetně nabíjení je $144 + 15 = 159$ (v sekundách).

Cyrilův první let trval celkem 159 s.

b)

Za jeden den vzniknou z jednoho organismu dva nové, tedy $1 \cdot 2 = 2$. Za další den se každý ze dvou nových organismů rozdělí na dva nové organismy, tedy celkem máme $2 \cdot 2 = 4$ organismy. Za třetí den se opět každý ze čtyř organismů rozdělí na dva, tedy máme $4 \cdot 2 = 8$ organismů. A tak můžeme experimentovat dále, například za týden vznikne $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{7} = 128$ organismů.

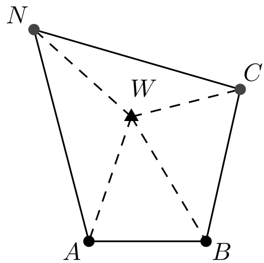
Zkoušíme proto dále, za 10 dnů už máme $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{10} = 1024$ organismů.

Tento počet je ale menší než Cyrilem požadovaný počet 2023. Za jedenáctý den pak dostaneme 2048 organismů, což už vyhovuje zadání úlohy.

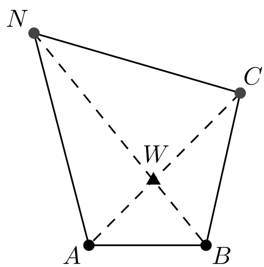
Více než 2023 organismů vznikne za 11 dnů.

c)

Umístění planet můžeme zvolit jako na obrázku, někde ve vnitřní oblasti je zvolen i bod W, který představuje výchozí bránu při cestách k planetám.



Pozice výchozí brány W pro lety k planetám A, C je výhodná, pokud W leží někde na úsečce AC (to vyplývá např. z trojúhelníkové nerovnosti v $\triangle ACW$ nebo z prosté úvahy o nejkratší vzdálenosti mezi dvěma různými body). Analogickou úvahu lze provést pro lety k planetám B a N, tedy v trojúhelníku NBW, kde bod W leží někde na úsečce BN. V průsečíku úhlopříček čtyřúhelníku $ABCN$ leží hledaná pozice výchozí brány W, viz obrázek.



Pro výpočet tohoto nejmenšího součtu vzdáleností z výchozí brány W ke všem čtyřem planetám stačí jen sečíst délky úhlopříček zmiňovaného čtyřúhelníku, $|WA| + |WB| + |WC| + |WN| = |AC| + |BN| = 25$ AU.

d)

V prvním testu jde o součet čísel $10+11+\cdots+128$, ve druhém testu o součet konečné řady $27 + 28 + \cdots + 145$. Pro řešení úlohy není důležité stanovit oba součty a následně spočítat jejich rozdíl. V obou testech jde o součet 119 přirozených čísel, přičemž ve druhém testu je každé z čísel na příslušné pozici vždy o 17 větší než odpovídající číslo v prvním testu. Druhý test bude větší právě o tento rozdíl, tj. je větší o $119 \cdot 17 = 2023$.

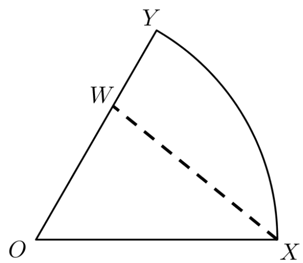
Druhý test byl větší o 2023.

Superhrdinská pizza

Zadání

Ke spojení sil dvou superhrdinů dojde za předpokladu, že bude vyřešen superúkol.

Iron Man má jeden dílek dokonale kruhové pizzy o poloměru 18 cm, zbylých pět dílků snědli ostatní superhrdinové. Všechny dílky byly stejně velké a stejného tvaru. Iron Man povídá: „Kapitáne Ameriko, když vypočítáš, kde přesně musím svým paprskem udělat řez na tomto dílku tak, aby vznikly dva útvary o stejném obsahu, můžeme spojit své schopnosti! Na obrázku vidíš, jakým způsobem chci dílek rozříznout. Ty jen zjisti, jak daleko jsou od sebe body O a W."



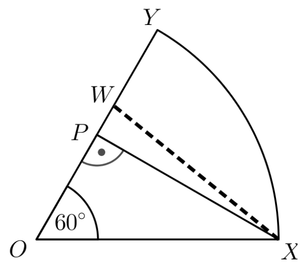
Pomozte Kapitánovi a tuto vzdálenost vypočítejte.

Řešení

Ze zadání plyne, že obsah jednoho dílku je roven $\frac{1}{6}$ obsahu kruhu o poloměru $r = 18$ cm. Obsahy vzniklých útvarů mají být stejné, označme je S. Pak dostáváme

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 18^2 = 27\pi \text{ cm}^2 .$$

Velikost úhlu XOY je $60°$. Z bodu X vedeme kolmici na úsečku OY, patu kolmice označíme P (viz obrázek). Úsečka XP je pak výška trojúhelníku XOW.



V pravoúhlém trojúhelníku OXP platí $\sin 60^\circ = \dfrac{|XP|}{|OX|}$, tedy

$$|XP| = |OX| \cdot \sin 60^\circ = |OX| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}\ \mathrm{cm}\ .$$

Vzhledem k tomu, že známe obsah vzniklého trojúhelníku, dostáváme

$$S = \frac{|OW| \cdot |XP|}{2} = \frac{|OW| \cdot 9\sqrt{3}}{2} = 27\pi\ \mathrm{cm}^2,$$

odkud vyjádříme $|OW|$:

$$|OW| = \frac{54\pi}{9\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\pi\ \mathrm{cm}.$$

Jiné řešení:

Druhý způsob řešení využívá vztahu pro výpočet obsahu trojúhelníku pomocí goniometrické funkce sinus, tedy

$$S = \frac{1}{2}|OW| \cdot |OX| \cdot \sin 60^\circ.$$

Z toho plyne:

$$|OW| = \frac{2S}{|OX| \cdot \sin 60^\circ}$$

$$|OW| = \frac{2 \cdot 27\pi}{18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6\pi}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\pi\ \mathrm{cm}$$

Odpověď: Bod W, kterým Iron Man musí svým paprskem vést řez, je od bodu O vzdálený $2\sqrt{3}\pi$ cm.

Orientační běh

Zadání

Do finálové desítky se na MS v orientačním běhu probojovali právě 3 závodníci ze Švédska, z žádné další země se neprobojoval více než jeden závodník. Běžci budou startovat postupně ve dvouminutových intervalech tak, aby závodníci z jedné země nestartovali bezprostředně po sobě. Určete, kolika způsoby lze sestavit rozvrh startů finálového závodu.

Řešení

Řešení 1

V závodě poběží deset běžců. Pro první startovní pozici máme 10 možností, jak ji obsadit, pro druhou už jen 9, pro třetí 8, ..., až na poslední pozici už zbývá jen jedna možnost. Všech možných pořadí, v jakých budou běžci startovat, je tedy

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \, \cdots \, \cdot 1 = 10! = 3\,628\,800.$$

Z těchto možností musíme vyloučit ty, ve kterých by startovali po sobě 2 běžci ze Švédska, těch je 9! (na tyto 2 běžce je možné pohlížet jako na jeden prvek). Těchto možností je celkem 6 (označíme-li běžce ze Švédska A, B, C – jsou to uspořádané dvojice AB, BA, AC, CA, BC, CB).

Těchto $6 \cdot 9!$ možností však není vzájemně disjunktních – uspořádání, kdy startují všichni 3 za sebou, např. v pořadí ABC, jsou obsaženy ve 2 množinách uspořádání (AB, BC). Proto je třeba dále odečíst od těchto $6 \cdot 9!$ variant ty, které jsou počítány dvakrát – těch je $6 \cdot 8!$ (na všechny 3 švédské závodníky je možné pohlížet jako na jeden prvek a tyto 3 závodníky je možné uspořádat 6 způsoby).

Celkem tedy budeme odečítat $6 \cdot 9! - 6 \cdot 8!$ variant, to je 1 935 360 možností.

Celkový počet uspořádání je tedy $10! - (6 \cdot 9! - 6 \cdot 8!) = 1\,693\,440$.

Organizátoři finálového závodu mohou sestavit 1 693 440 rozvrhů startů finálového závodu.

Řešení 2

Uvažujme, že sedm závodníků z různých zemí stojí jeden vedle druhého, vznikne tím 6 mezer, do kterých je možno umístit švédské běžce. Dále je možné běžce ze Švédska umístit na první a poslední místo. Pro prvního ze Švédů existuje osm možných pozic, kde může startovat. Pro druhého je pozic 7 a pro třetího šest.

Sedm závodníků z jiných zemí můžeme seřadit 7! různými způsoby, švédské běžce je možno uspořádat $8 \cdot 7 \cdot 6$ způsoby.

Celkově je tedy počet uspořádání roven $7! \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 1\,693\,440$.

Soutěž v létání

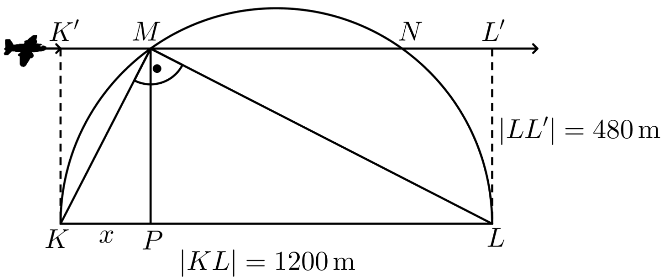
Zadání

Na letišti v Příbrami probíhala soutěž dvoumístných hornoplošníků. V jedné z disciplín přesného létání, která spočívala v letu nad daným úsekem přímé silnice, měla posádka za úkol tento úsek vyfotografovat. Úsek byl bez převýšení, dlouhý 1,2 km, na mapě označený úsečkou KL. Piloti měli k dispozici zastaralý fotoaparát s objektivem, kterým lze fotografovat maximálně pod zorným úhlem 90 stupňů. Soutěžící při letu nad silnicí letěli stálou rychlostí 40 m/s a ve stálé výšce 480 m.

Vypočítejte délku úseku, na kterém lze daným fotoaparátem vyfotografovat celou silnici, a také čas potřebný ke zhotovení snímku od okamžiku přeletu nad místem K do okamžiku minutí místa L.

Řešení

Úsek silnice KL můžou piloti vyfotit jen v případě, že ho vidí pod sebou pod zorným úhlem 90 stupňů a menším (viz obrázek).



Tomu odpovídají na letové dráze $K'L'$ úsečky $K'M$ a NL' (označené na obrázku x).

V pravoúhlém trojúhelníku KLM platí Euklidova věta o výšce:

$$|MP|^2 = x \cdot (|KL| - x).$$

Po dosazení hodnot a úpravě na kvadratickou rovnici dostáváme kořeny $x = 960$ m a 240 m.

Úsek $K'M$ je tedy dlouhý 240 m. Další úsek vhodný pro fotografování je NL', který je stejně dlouhý.

Jestliže letadlo letí rychlostí 40 m/s, celkovou vzdálenost 480 m vhodnou pro fotografování proletí za čas $t = 480 : 40 = 12$ s.

Odpověď:

Celková délka úseku silnice k vyfotografování je 480 m a na zhotovení snímku silnice má posádka celkem 12 s.

Ovocná buchta

Zadání

Martina s Vítem mají ze sladkých moučníků nejraději ovocnou buchtu. Po upečení buchty na klasickém obdélníkovém plechu si ji chtějí spravedlivě rozdělit, tzn. oba mít stejný počet nakrájených shodných dílků. Krájí se obvyklým způsobem – vytváří se obdélníková mřížka. Problém spočívá v tom, že Vítek chce jenom krajní dílky, Marťa naopak jen ty, které okraj nemají.

a) Na kolik dílků mohou buchtu nakrájet? Uveďte všechna řešení.

b) Co když se k nim přidá Vítkova maminka, která má také raději krajní dílky? Na kolik dílků budou pak buchtu krájet?

Řešení

Označme si počet dílků na jedné straně plechu a, počet na druhé straně b.

a)

Pak podle zadání platí $(a-2)(b-2) = 2a + 2b - 4$.

Po úpravě dostaneme $ab - 2a - 2b + 4 = 2a + 2b - 4$, což lze dále zjednodušit: $ab - 4a - 4b + 4 = -4$.

Abychom mohli levou stranu rozložit na součin, přičteme k oběma stranám rovnice číslo 12 a dále upravujeme:

$$\begin{aligned} ab - 4a - 4b + 16 &= 8 \\ a(b-4) - 4(b-4) &= 8 \\ (a-4)(b-4) &= 8 \end{aligned}$$

Číslo 8 lze rozložit na součin dvěma způsoby: $8 = 1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$, tedy $a - 4 = 1$ a $b - 4 = 8$, nebo $a - 4 = 2$ a $b - 4 = 4$. Pak $a = 5,\ b = 12$, nebo $a = 6,\ b = 8$.

Vít s Martinou mohou nakrájet buchtu buď na 60 (12×5) dílků, nebo na 48 (8×6) dílků.

b)

Přidá-li se k nim Vítkova maminka, pak vypadá rovnice takto:

$$2(a-2)(b-2) = 2a + 2b - 4$$

Rovnici upravujeme podobně jako v předchozím případě:

$$\begin{aligned}
2ab - 4a - 4b + 8 &= 2a + 2b - 4 \\
2ab - 6a - 6b + 12 &= 0 \\
ab - 3a - 3b + 6 &= 0 \\
ab - 3a - 3b + 9 &= 3 \\
a(b-3) - 3(b-3) &= 3 \\
(a-3)(b-3) &= 3
\end{aligned}$$

Číslo 3 rozložíme na součin jedním způsobem, tzn. $a - 3 = 1, b - 3 = 3$.

Je tedy jen jedno řešení: $a = 4, b = 6$.

Buchtu mohou nakrájet na 24 (6×4) dílků.

Johnny's Hobby Project

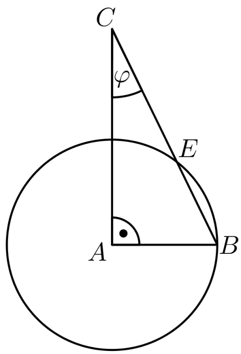
Problem

Johnny is making a hobby project. He wants to laser cut a wooden ball and create a rotational gadget.

The laser beam leaves the laser head at point C, enters the ball at point E and leaves the ball at point B. The distance between the laser head and the point where the laser beam hits the ball is 10 cm. The distance that the laser beam needs to cut through the wood is 8 cm.

The centre of the ball is at point A. The angle BAC is a right angle.

Calculate $\cos\varphi$.



Solution

Let's represent the wooden ball with a circle k, the radius of k is r, the intersections of the line CA with k are points D, F and the length of line segment $|CD| = a$.

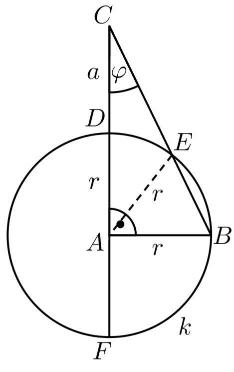
Solution 1

By the Pythagorean Theorem for triangle ABC, it holds that $r^2 + (a+r)^2 = (10+8)^2$, after expanding $2r^2 + a\,(a + 2r) = 324$.

By the Power of a Point Theorem with respect to point C and k, we get $|CD| \cdot |CF| = |CE| \cdot |CB|$, which means $a(a + 2r) = 180$.

By combining two previous equations, we obtain $2r^2 + 180 = 324$, thus $r = 6\sqrt{2}$ cm.

By using the Pythagorean Theorem for ABC,



$$a + r = |AC| = \sqrt{18^2 - \left(6\sqrt{2}\right)^2} = 6\sqrt{7}\text{ cm}.$$

Using Cosine Formula for right triangles, we get the solution

$$\cos\varphi = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{6\sqrt{7}}{18} = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Solution 2

By the Law of Cosines for the triangle AEC, it holds that

$$r^2 = (a+r)^2 + 10^2 - 2(a+r)\cdot 10\cdot\cos\varphi.$$

By the Pythagorean Theorem for ABC: $(a+r)^2 = 18^2 - r^2$, expanded: $a + r = \sqrt{18^2 - r^2}$.

And we know that $\cos\varphi = \dfrac{a+r}{18} = \dfrac{\sqrt{18^2-r^2}}{18}$.

By substituting $\cos\varphi$ in the first equation, we obtain

$$r^2 = 18^2 - r^2 + 100 - 2\sqrt{18^2-r^2}\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{18^2-r^2}}{18}.$$

Let's simplify this equation in the following steps:

$$\begin{aligned} r^2 &= 324 - r^2 + 100 - \tfrac{10}{9}\cdot\left(324 - r^2\right) \\ r^2 &= 64 + \tfrac{1}{9}r^2 \\ r^2 &= 72 \end{aligned}$$

By using the formula for cosine for right triangles, we get the solution

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{18^2-72}}{18} = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, příspěvková organizace

Sborník příkladů ze soutěže
Moravskoslezský matematický šampionát 2023

Ostrava 19. 10. 2023

Název	Moravskoslezský matematický šampionát 2023
Editor	Mgr. Jana Gajdušková
Vydavatel	Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, p. o. Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba
Náklad	350 ks
Rozsah	28 stran
Vydání	první, 2023, revize 1
Tisk	AHA trading, s.r.o.
Doporučená cena	zdarma

Texty neprošly jazykovou úpravou.