Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
příspěvková organizace

Moravskoslezský matematický šampionát 2022

Sborník

Ostrava-Poruba
20. 10. 2022

Organizační výbor

PaedDr. Antonín Balnar, Ph.D.	hlavní organizátor
Mgr. Jana Gajdušková	odborný matematický dohled

Autoři a recenzenti

RNDr. Ivana Breginová, Mgr. Lenka Dedková, Mgr. Jana Gajdušková,

Mgr. Petra Kňurová, Mgr. Lenka Hořenková Kucosová,

Mgr. Tomáš Krchňák, Mgr. Lenka Plášková, Mgr. Pavel Skalný, Ph.D.,

Mgr. Marie Štípalová, RNDr. Michal Vavroš, Ph.D.

Obsah

Úvodní slovo

Jsem lingvista a mám pocit, že si lidé přestávají rozumět. Představuji si, že mé pocity jsou stejné, jako pocity lékaře, když jsou lidé čím dál více nemocní. Je mi z toho přinejmenším smutno. Naše společnost je čím dál vzdělanější a čím dál vyspělejší. Proč tedy máme problém s tak jednoduchým procesem, jakým je komunikace? Stačí přece vzít myšlenku, zakódovat ji a druhá strana ji za použití stejného kódu, rozuměj jazyka, zase dekóduje a porozumí jí. Pokud nerozumím tomu, co mi druhý člověk sděluje, může být problém v neschopnosti kódovat, dekódovat nebo v chybovosti a nejednoznačnosti kódu. Ano, jazyk jako kód není dokonalý. Některé jeho části mají více možných významů (homonyma), některé informace jdou zakódovat různými slovy (synonyma), pro některé významy naopak část kódu zcela chybí. Některé části kódu používá každý člověk odlišně.

Když lidstvo vysílalo prostřednictvím sond Voyager 1 a 2 zprávu jiným civilizacím, potřebovalo jednoznačný kód, kterým zašifruje informaci a který budou moci jiné civilizace použít k tomu, aby tuto informaci jasně dešifrovaly. Tím kódem byla (mimo jiné) matematika. Je to univerzální kód. Matematici si mezi sebou rozumějí. Buďme rádi, že ji máme, užijte si ji $\ddot\smile$

Mgr. Jan Netolička
ředitel Wichterlova gymnázia

Pohyb = matice? Ne, kvaterniony!!!

Anotace přednášky

Jak pohnout bodem nebo hmotným tělesem? Jinými slovy jak spočítat polohu bodu po předepsaném pohybu (otočení a posunutí)? Klasicky pomocí matic, i když v různých vektorových prostorech (vektorový prostor nebo jeho afinní rozšíření). Lepší způsob je počítat pozice pomocí kvaternionů, tedy prvků se třemi komplexními jednotkami. Zní to složitě, ale je to mnohem jednodušší, než se zdá. Navíc popis pohybu v kvaternionech odpovídá mnohem lépe naší geometrické představě.

Během přednášky se pokusíme ukázat na příkladech postupy, vysvětlit pojmy a odpovědět na otázky, hlavně na tu základní: „K čemu to je?“ Navíc naznačíme i směr, kterým se ubírat, pokud toužíme po ještě dokonalejším modelovém prostoru pro pohyb hmotného tělesa.

doc. Mgr. Petr Vašík, Ph.D.
ředitel Ústavu matematiky FSI VUT v Brně

Kdo má pravdu?

Zadání

a) Petr a Pavel nosili u babičky vodu ve dvou odlišných kbelících tvaru válce. Zelený měl dvakrát větší průměr dna než modrý, modrý měl ale třikrát větší výšku než zelený. Petr si vzal zelený kbelík a tvrdí Pavlovi: „Objem mého kbelíku je menší než objem tvého.“ Pavel nesouhlasí.

   Kdo má pravdu? Uveď výpočet.

b) Jana a Zuzka zkouší péct koláče. Jana upekla 25 koláčků o průměru 10 cm, Zuzka má stejné množství těsta a chce upéct jeden velký stejně vysoký koláč. Jana tvrdí: „Tvůj koláč bude mít průměr aspoň 40 cm.“

   Zuzka kroutí hlavou.

   Jaký bude průměr velkého koláče?

c) Eva a Monika pozorují u řeky loď, která pluje podél břehu rychlostí 15 km/h. Když byla od nich vzdálena 1 kilometr, vyrazil podél řeky stejným směrem cyklista rychlostí 18 km/h. Eva si myslí, že za 10 minut cyklista loď dohoní. Monika odhaduje, že to bude trvat déle.

   Která z nich má pravdu a proč?

d) Malý matematik Pepík píše svému dospělému bratru Matějovi: „Za poslední rok jsem vyrostl o 5 % výšky, měřím teď 168 cm. Pokud se za další rok moje výška znovu o 5 % zvětší, budu větší než ty?“

   Matěj odpovídá: „Já měřím o 10 % více, než byla tvá výška před rokem, a už nerostu. Takže podle tvých předpokladů budeš za rok o 4 cm vyšší než já.“

   Pepíkovi se to nezdá a přepočítá si to.

   Jak je to správně?

Řešení

a)

Označme r poloměr a v výšku zeleného kbelíku, pak jeho objem $V = \pi r^2 v$.

Modrý kbelík pak má poloměr $0{,}5r$ a výšku $3v$, proto jeho objem můžeme vyjádřit jako $V = \pi \left(\frac{1}{2}r\right)^2 3v$. Po úpravě získáme objem modrého kbelíku $V = 0{,}75\pi r^2 v$, což je méně než objem zeleného kbelíku.

Petr neměl pravdu, objem jeho zeleného kbelíku je větší než objem Pavlova modrého kbelíku.

b)

Vzhledem ke stejné výšce koláčů stačí počítat obsah kruhu.

Pro jeden malý koláček vychází $S_1 = \pi 5^2 = 25\pi$. Pro dvacet pět koláčků tedy $S = 625\pi$.

Pro velký koláč tedy musí být poloměr $\sqrt{625} = 25$ cm.

Jana měla pravdu, průměr koláče je 50 cm.

c)

Označme neznámý čas cyklisty t. Dráha cyklisty pak bude $s_c = 18t$, dráha lodi $s_l = 15t$.

Aby cyklista dohonil loď, musí překonat její náskok 1 km, proto dostaneme rovnici pro dráhy $s_c = s_l + 1$, odtud po dosazení $18t = 15t + 1$.

Z této rovnice již vypočítáme čas $t = \frac{1}{3}h$, potřebný čas je tedy 20 minut.

Správně to odhadla Monika, potřebný čas je 20 minut.

d)

Nejprve vypočítáme původní výšku Pepíka h_p pomocí vztahu $1{,}05h_p = 168$, odtud po úpravě $h_p = 160$ cm.

Za další rok by pak měl výšku $h_p' = 168 \cdot 1{,}05 = 176{,}4$ cm.

Bratr Matěj má výšku $h_m = 160 \cdot 1{,}1 = 176$ cm.

Pepík by za rok byl větší, ale jen o 0,4 cm.

Hrátky s krychlí

Zadání

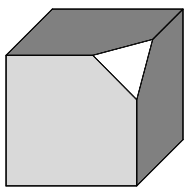
Tři kamarádi mají v krabici hromadu dřevěných barevných kostek tvaru krychle. Každá stěna krychle je obarvená jinou barvou.

a) Pavel, Jirka a Hanka se dívají na krychIi ze tří různých směrů. Pavel vidí modrou, bílou a žlutou stěnu, Jirka černou, modrou a červenou a Hanka zelenou, černou a bílou. Jaká je barva stěny proti bílé stěně?

b) Jednu kostku chtějí rozdělit na 27 malých shodných krychliček. Kolika řezy ji rozdělí, pokud každou další již nařezanou část řežou zvlášť? Kolik malých krychliček bude mít obarvenou nějakou barvou jednu, dvě, tři stěny? Kolik kostiček zůstane neobarvených?

c) Hanka si postavila z krychlí kvádr. Pavel a Jirka si chtěli postavit stejný, a tak se Hanky zeptali, kolik budou potřebovat kostek. Hanka jim nechtěla číslo prozradit, ale dala jim nápovědu: „Kdybych přidala ještě jednu vrstvu nahoru, měla bych kostek 96. Kdybych přidala jednu vrstvu z boku, měla bych krychlí celkem 105.“ Z kolika kostek Hanka svůj kvádr postavila?

d) Nakonec ještě chlapci uřezali část jedné krychle podle obrázku. Zbytek krychle bez rohu (jen obarvené stěny) chtěli obalit bílým papírem. Nakreslete síť této uřezané krychle, která poslouží jako šablona pro papír potřebný k polepení zbytku krychle.



Řešení

a) Každý z kamarádů vidí trojici sousedících stěn krychle. Pavel vidí modrou, bílou a žlutou, tedy proti bílé není ani modrá ani žlutá. Hanka vidí zelenou, černou a bílou, proti bílé nebude zelená ani černá. Proti bílé stěně je červená.

b) První dva řezy rozdělí krychli na 3 shodné kvádry, každý ze tří kvádrů rozdělíme dalšími dvěma řezy na další 3 kvádry a nakonec každý z 9 kvádrů dvěma řezy na 3 krychličky, tedy $2 + 3 \cdot 2 + 9 \cdot 2 = 26$.

6 kostek bude mít natřenou jednu stěnu, 12 dvě stěny, 8 tři stěny a 1 kostka bude neobarvená.

c) Objem postaveného kvádru vyjádříme jako $V = a \cdot b \cdot c$, kde a, b, c jsou rozměry uvedené v počtech krychlí.

Přidá-li Hanka jednu vrstvu nahoru, bude $V = a \cdot b \cdot (c + 1) = 96$, přidá-li jednu vrstvu z boku, bude $V = (a+1) \cdot b \cdot c = 105$, nezmění se tedy rozměr b.

Provedeme prvočíselný rozklad čísel 96 a 105:

$$96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3, \;\; 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7,$$

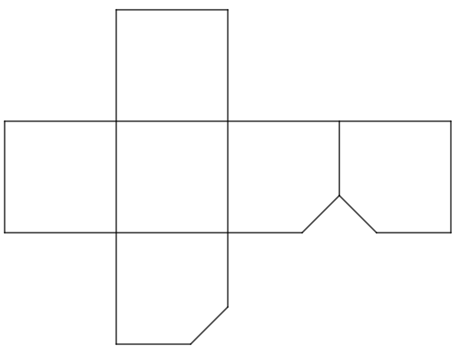
z obou rozkladů plyne, že $b = 3$ krychle. Z rozkladu 105 dále vyplývá, že $(a + 1) = 7$ nebo $(a + 1) = 5$.

Kdyby platilo $(a + 1) = 7$, pak $a = 6$, číslo $6 = 2 \cdot 3$, to ale není možné, protože v rozkladu 96 je pouze jedna trojka.

Tedy $(a + 1) = 5$, $a = 4$, číslo $4 = 2 \cdot 2$ a je v rozkladu 96.

Hanka postavila kvádr o délce 4 krychle, šířce 3 krychle a výšce 7 krychlí, spotřebovala tedy $4 \cdot 3 \cdot 7 = 84$ kostek.

d) Správnou možností je např. síť na obrázku.



Stavebnice

Zadání

Vojta dostal za pěkné vysvědčení stavebnici s mnoha díly a součástkami na stavbu různých dopravních prostředků.

1. Koloběžky, tříkolky a autíčka

   a) Koloběžky a tříkolky
   Součástí stavebnice bylo celkem 19 koleček. Vojta všechna tato kolečka chtěl použít při stavbě tříkolek a koloběžek. Kolik různých variant počtu koloběžek a tříkolek mohl Vojta sestavit?

   b) Koloběžky a autíčka
   Vojta se pak rozhodl, že místo tříkolek bude stavět autíčka. Měl opět k dispozici jen 19 koleček a opět je chtěl všechna použít. Kolik různých variant počtu koloběžek a autíček mohl Vojta sestavit?

2. Závody s autíčky

   Ke konci prázdnin se Vojta rozhodl zorganizovat pro své kamarády závod s autíčky. Celkem se sešlo osm chlapců, mezi nimi i Ondra ze sousedství.

   a) Kolik různých umístění mohlo být na medailových pozicích (první až třetí místo), jestliže všechna umístění závodu skončila jednoznačně bez dělených pozic?

   b) V kolika případech z tohoto celkového počtu různých medailových umístění skončil Vojta na prvním místě?

   c) V kolika ze všech možných různých umístění mohl skončit Vojta na libovolném místě před svým kamarádem Ondrou?

Řešení

1a)

Označme počet sestavených koloběžek k a tříkolek t. Na stavbu k koloběžek potřebujeme $2k$ koleček, obdobně pro t tříkolek potřebujeme $3t$ koleček. Celkem má Vojta ve stavebnici k dispozici 19 koleček, tedy musí platit rovnice

$$2k + 3t = 19.$$

Jedná se sice o rovnici o dvou neznámých k a t, kterou ale řešíme v množině celých nezáporných čísel. Jednotlivé možnosti možného počtu koloběžek a tříkolek můžeme přehledně vyšetřit následujícím schématem:

$k=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$2k=$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
$3t=$	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1

Z uvedených možností pro hodnotu výrazu $3t$ přicházejí v úvahu jen tři případy $3t = 15; 9; 3$. Z toho pak plynou i tři kombinace koloběžek a tříkolek: dvě koloběžky a pět tříkolek, pět koloběžek a tři tříkolky nebo osm koloběžek a jedna tříkolka.

Řešení rovnice můžeme též zapsat ve tvaru uspořádané dvojice $[k, t]$ s možnostmi $[2, 5], [5, 3], [8, 1]$.

1b)

Ponecháme-li označení počtu sestavených koloběžek k, na ně použitých koleček $2k$ a nově označíme počet sestavených autíček a, pak opět musí platit rovnice pro počet použitých koleček

$$2k + 4a = 19.$$

Zkoumání možností počtu koloběžek a autíček se lehce vyhneme, uvážíme-li, že na levé straně této rovnice jsou obě čísla sudá. Jejich součtem je zase číslo sudé, což je v rozporu se stranou pravou, kde je číslo liché.

Vojta tedy neměl žádnou možnost sestavit koloběžky a autíčka tak, aby upotřebil všechna kolečka ze stavebnice.

2a)

Podle zadání všechna možná pořadí závodníků s autíčky skončila jednoznačně. Na první pozici mohl skončit kdokoli, máme osm možností. K tomu na druhém místě mohl skončit kdokoli ze zbývajících sedmi závodníků a analogicky na třetí místo máme už jen šest možností, jak jej obsadit. Výpočet je $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Na prvních třech místech je celkem 336 možných pořadí.

2b)

Pokud bychom Vojtu umístili na první místo, pak na druhé místo je jen sedm možností a na třetí šest. Výpočet je $1 \cdot 7 \cdot 6 = 42$.

Ve 42 případech ze všech možných pořadí by byl Vojta na prvním místě.

2c)

Všech různých umístění osmi závodníků je $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$ a nikde se podle zadání nevyskytlo dělené místo. Z těchto všech různých pořadí závodníků jsou možné jen dvě varianty, jak mohli ve vzájemném souboji skončit Vojta s Ondrou. Buď byl Vojta před Ondrou kdekoli výše, nebo naopak Ondra porazil Vojtu a byl v celkovém umístění někde před ním.

Proto je celkem $40\,320 : 2 = 20\,160$ možností ze všech různých pořadí, v nichž ve vzájemném souboji Vojta porazil Ondru.

Vojtěch letí na konferenci

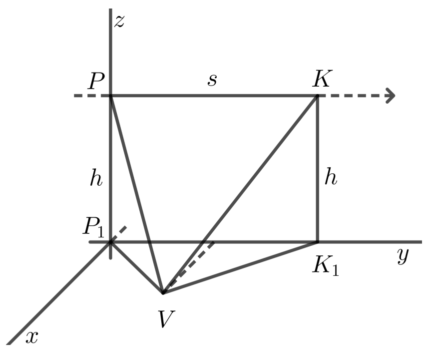
Zadání

Matematik Vojtěch vycestoval na matematickou konferenci. Protože se konala v zámoří, zvolil jako dopravní prostředek letadlo. Během letu si všiml zajímavé věci. Když se podíval z okýnka, viděl v jihovýchodním směru pod hloubkovým úhlem 45° kulovitý tvar vodojemu. Na tom by zase nic tak moc zajímavého nebylo, ale když se podíval znovu za 30 sekund, uviděl stejný vodojem tentokrát v jihozápadním směru pod stejným hloubkovým úhlem. Letadlo celou tu dobu letělo ve stálé výšce 5 100 m konstantní rychlostí. Vojtu napadlo, že by se z těchto údajů dala tato rychlost vypočítat. Zkuste to i vy.

Řešení

Označíme si dráhu letadla s, jeho rychlost v, počáteční bod jeho dráhy P, koncový bod K. Jeho výška je $h = 5\,100$ m, čas letu je $t = 30$ s.

Situaci si můžeme znázornit na následujícím obrázku (body P_1 a K_1 jsou průměty bodů P, K na zemi, V je vodojem).



Trojúhelníky PVK a P_1VK_1 jsou oba rovnoramenné a pravoúhlé.

Ze zadání plyne, že velikost úhlu P_1PV je 45°, délka P_1V je tedy stejná jako výška, ve které letí letadlo. Totéž platí pro délku K_1V.

Dráha letadla s je rovna délce P_1K_1. Z Pythagorovy věty pro trojúhelník P_1VK_1 plyne, že $s = h\sqrt{2} = 5100\sqrt{2}$ m.

Rychlost letadla je pak

$$v = \frac{s}{t} = \frac{5100\sqrt{2}}{30} \doteq 240,4\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} \doteq 865{,}5\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}.$$

Visací zámek

Zadání

Kamil si koupil visací zámek s pětimístným kódem k zabezpečení kůlny. Když si svůj kód nastavil, všiml si, že vzniklé pěticiferné číslo má zajímavou vlastnost.

Zapíšeme-li za sebe zleva doprava zbytky, které toto číslo dává při dělení čísly 2, 3, 4, 5 a 6, dostaneme opět výchozí číslo.

Jaký pětimístný kód Kamil vytvořil? Kolik řešení existuje?

Řešení

Hledané číslo je nutně liché, neboť jeho první číslice nemůže být 0, takže je 1.

Proto tedy při dělení šesti dává zbytek 1, 3 nebo 5, a tak při dělení třemi dává po řadě zbytek 1, 0 nebo 2.

Zápis pětimístného čísla má jeden z tvarů:

$$11{*}{*}1,\quad 10{*}{*}3,\quad 12{*}{*}5.$$

S ohledem na dělení pěti můžeme zápis upřesnit:

$$11{*}11,\quad 10{*}33,\quad 12{*}05.$$

Protože dělíme také čtyřmi, je naše číslo rovno jednomu z čísel:

$$11311,\quad 10133,\quad 12105.$$

Nyní zbývá ověřit (například pomocí ciferného součtu), zda zbytek při dělení třemi odpovídá druhé číslici zleva. Zjistíme, že tomu tak je pouze u prvního čísla.

Kamilův kód může být pouze jediné číslo, a to 11311.

Year 2022

Problem

Let a and b be positive integers such that

$$ab = 2022(a + b)\ .$$

Determine the largest possible value of a.

Solution

Rearranging the terms we get

$$ab - 2022a - 2022b = 0\ .$$

We need to factor the expression on the left side of the equation. To that end, we add the quantity 2022^2 to both sides and group the elements as follows:

$$\begin{aligned} ab - 2022a - 2022b + 2022^2 &= 2022^2\ , \\ a(b - 2022) - 2022(b - 2022) &= 2022^2\ , \\ (a - 2022)(b - 2022) &= 2022^2\ . \end{aligned}$$

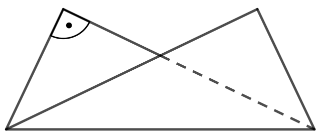
For a to be the largest, the quantity $(a - 2022)$ has to be the largest as well. As we see, it is inversely proportional to the quantity $(b - 2022)$, which (for positive integers a and b) can be 1 at least. By setting $b = 2023$ we maximize $(a - 2022)$ as well as a, whose largest possible value is thus $2022^2 + 2022 = 4090506$.

The problem has one solution $a = 4090506$.

List papíru

Zadání

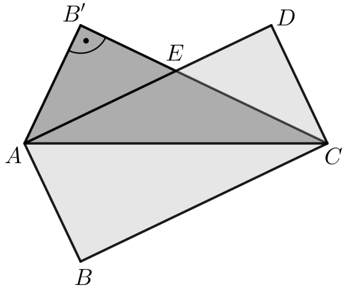
Město Shimonogushi vyhlásilo architektonickou soutěž o nejlepší návrh budovy městské knihovny. Zvítězil projekt s atypickým půdorysem. Jeho autor, architekt Kumamoto, se při navrhování inspiroval materiálem, z něhož jsou knihy vyráběny. Ze svého pracovního stolu vzal obdélníkový list papíru, přeložil ho podél jeho úhlopříčky (viz obrázek) a dále pak pracoval s tvarem, který takto vznikl.



Mimo jiné zjistil, že plocha tohoto nekonvexního pětiúhelníka je rovna $\frac{7}{10}$ plochy původního obdélníka (tzn. nepřeloženého listu). Jaký byl v tom případě poměr delší strany papíru vůči jeho kratší straně?

Řešení

Nechť $ABCD$ je obdélník představující uvedený list papíru. Jestliže bod B zobrazíme v osové souměrnosti s osou $\overleftrightarrow{AC}$ do bodu B' a průsečík přímek $\overleftrightarrow{AD}$ a $\overleftrightarrow{B'C}$ označíme E, vznikne zadaný pětiúhelník $ACDEB'$ (viz obrázek).



Pro obsah k-úhelníka $P_1P_2\dots P_k$ budeme v následujícím textu používat zápis $|P_1P_2\dots P_k|$.

Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $|ABCDE| = 1$.

Potom $|ABCD| = |ABC| + |ACD| = |AB'C| + |ACD| = |AB'E| + 2|AEC| + |EDC| = |ACDEB'| + |AEC| = \frac{7}{10}|ABCD| + |AEC|$.

Odtud $|AEC| = \frac{3}{10}|ABCD| = \frac{3}{10}$.

Protože $\triangle ECD \cong \triangle EAB'$, mají oba trojúhelníky obsah

$$\frac{\frac{7}{10} - \frac{3}{10}}{2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Trojúhelníky AEC a EDC mají společnou výšku, a to úsečku DC. Pro poměr jejich obsahů tedy platí

$$\frac{|DEC|}{|EAC|} = \frac{\frac{|DE|\cdot|DC|}{2}}{\frac{|EA|\cdot|DC|}{2}} = \frac{|DE|}{|EA|},$$

odtud

$$\frac{|DE|}{|EA|} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3}.$$

Označme tedy $|DE| = 2x$ a $|EA| = 3x$. Z Pythagorovy věty v trojúhelníku CDE pak plyne $|DC| = x\sqrt{5}$.

Pro podíl délek úseček DA a DC proto platí

$$\frac{|DA|}{|DC|} = \frac{|DE| + |EA|}{|DC|} = \frac{2x + 3x}{x\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Poměr delší strany papíru vůči jeho kratší straně je tedy $\sqrt{5} : 1$.

Ospalý student

Zadání

Bylo něco mezi devátou a desátou dopoledne, když se Jindra podíval na hodiny v učebně. Pak mu hlava klesla a on na semináři z matematiky usnul. Když se probudil a znovu se podíval na hodiny, s údivem zjistil, že ručičky na hodinách jsou na stejných místech jako předtím, jen hodinová ručička je teď tam, kde byla minutová, a minutová je přesně tam, kde byla hodinová. Bylo stále dopoledne, něco mezi desátou a jedenáctou.

Jak dlouho Jindra spal? Určete s přesností na sekundy.

Řešení

Předpokládejme, že se hodinová ručička v době Jindrova spánku přesune na hodinách o α stupňů. Minutová ručička za tu dobu urazí $360-\alpha$ stupňů.

Hodinová ručička uběhne za hodinu jednu dvanáctinu kruhu, minutová ručička oběhne za tutéž dobu kruh celý. Minutová ručička se tedy pohybuje dvanáctkrát rychleji než hodinová a zároveň se pohybují po stejnou dobu, pro jejich dráhy tedy platí

$$\frac{360-\alpha}{\alpha}=12.$$

Úpravou rovnice vypočítáme $\alpha=\frac{360}{13}$, což je velikost úhlu, o který se přemístí hodinová ručička.

Zbývá vypočítat, o jaký čas pro tento úhel se jedná. Za hodinu se hodinová ručička přesune o $30°$, takže $\frac{360}{13}$ stupňů urazí za $\frac{360}{13}:30=\frac{12}{13}$ hodiny.

Jindra tedy spal 55 minut a 23 sekund.

Poznámky:

Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, příspěvková organizace

Sborník příkladů ze soutěže Moravskoslezský matematický šampionát 2022

Ostrava 20. 10. 2022

Název	Moravskoslezský matematický šampionát 2022
Editor	Mgr. Jana Gajdušková
Vydavatel	Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, p. o. Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba
Náklad	400 ks
Rozsah	28 stran
Vydání	první, 2022, revize 1
Tisk	PRINTO, spol. s r.o.
Doporučená cena	zdarma

Texty neprošly jazykovou úpravou.