Zbývá pouze vyřešit případ, kdy je jedno z čísel a, b, c záporné (dvě čísla záporná zřejmě být nemohou, nebyla by splněna podmínka ze zadání).

Nechť $a = -n$, kde n je kladné číslo. Hledaný součet druhých mocnin bude mít potom stejnou hodnotu jako v případě $a = n$. Proto stačí pro naši analogii s obsahy dokázat, že se trojúhelník se stranou délky n „vejde“ do trojúhelníku ABC spolu s trojúhelníky o stranách délek b a c. Na toto ale už stačí jenom jednoduchý heuristický pohled, pokud si uvědomíme, že pro splnění podmínky ze zadání musí být n rovno nejvýše menšímu z čísel b, c a trojúhelník se stranou této délky se do ABC již vešel.

V krajském kole 64. ročníku byla zadána následující úloha:

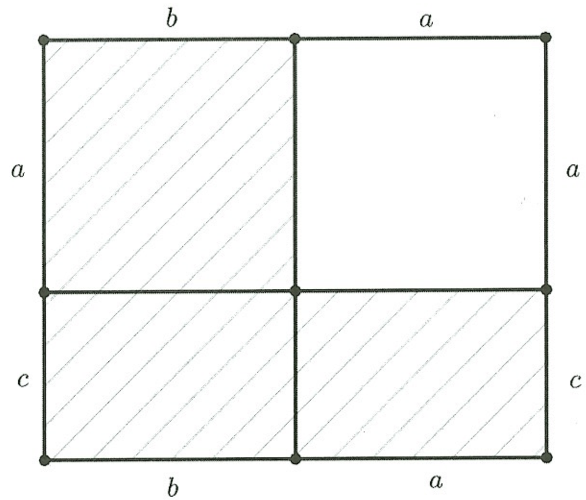
Pro kladná reálná čísla a, b, c platí:

$$ab + bc + ac = 16, \quad a \geq 3.$$

Najděte nejmenší možnou hodnotu výrazu $2a + b + c$.

Řešení. Autorské řešení najdete na webu matematické olympiády: `http://www.matematickaolympiada.cz/media/1681650/a64ii.pdf`

Stejně jako u předchozí úlohy interpretujme zadání geometricky:



Obr. 2: Geometrická interpretace úlohy – vyšrafovaná část má podle zadání konstantní obsah 16

Uvažme obdélník o stranách délky $a + b$ a $a + c$ (viz obr. 2). Jeho obsah S bude

$$S = ab + bc + ac + a^2 = 16 + a^2.$$

Podle podmínky $a \geq 3$ dostáváme $S \geq 25$.

Nyní se podívejme na jeho obvod o:

$$o = 4a + 2b + 2c = 2(2a + b + c).$$

Zjišťujeme, že zkoumaný výraz $2a + b + c$ je roven polovině obvodu útvaru, stačí tedy minimalizovat obvod tohoto obdélníku. Zredukovali jsme tedy úlohu na problém nalezení minimálního obvodu obdélníku o daném obsahu.

Jak je známo, řešením této úlohy je čtverec. Toto tvrzení lze dokázat s využitím AG nerovnosti

$$\frac{1}{2}(a + b + a + c) \geq \sqrt{(a + b)(a + c)},$$

přičemž rovnost nastává právě pro $a + b = a + c$, tj. pro $b = c$.

Platí $o \geq 4\sqrt{S} \geq 20$, a tedy $2a + b + c \geq 10$.

Výše popsaná úvaha nám také opět prezentuje existenci takovéto trojice a, b, c. Nejmenší možná hodnota výrazu $2a + b + c$ nastane pro $2a + b + c = 10$, $a = 3$ a $b = c$. Proto $a = 3$ a $b = c = 2$.

Geometrický význam Eulerova čísla e

José Marcial Nájares Romero, ZŠ Gutova, Praha

Abstrakt. V článku se budeme věnovat geometrickému významu čísla e. Hlavním cílem bude ukázat konstrukci úseček, jejichž délka se blíží hodnotě e.

Eulerovo číslo e patří mezi nejvýznamnější matematické konstanty. Je pojmenováno po švýcarském matematikovi Leonhardu Eulerovi. O historii tohoto čísla či výpočtu jeho číslic si můžete přečíst například v [1]. Je známo, že číslo e je iracionální a je dokonce transcendentní, což znamená, že není kořenem žádného polynomu s racionálními koeficienty. Další neméně důležitou konstantou v matematice je Ludolfovo číslo π,