kde e je Eulerovo číslo, i je roční úroková sazba a t je čas vyjádřený v letech. Obdobným způsobem jako u pravidla 72 odvoďte konstantu 69 pro spojité úročení. Jaký má na výsledek dopad roční úroková sazba i a proč?

Literatura

[1] Bláha, M.: *Úročení ve finanční matematice.* Práce SOČ, Biskupské gymnázium, církevní základní škola, mateřská škola a základní umělecká škola, Hradec Králové, 2020, [online]. Dostupné z: https://www.academia.edu/43976982/SOC_Marek_Blaha_Uroceni_ve_financni_matematice.

Geometrická řešení algebraických úloh MO

Vojtěch David, Wichterlovo gymnázium

Abstrakt. Algebraické úlohy zadávané v Matematické olympiádě bývají samy o sobě často na první pohled neintuitivní a jejich autorská řešení matematicky příliš deduktivně dokonalá. Některé z nich ale mají i svou geometrickou interpretaci, u které je poté možné najít řešení pouhým vhledem. V tomto článku jsou uvedena dvě takováto řešení k úlohám, které se objevily v krajských kolech 68. a 64. ročníku Matematické olympiády kategorie A.

V krajském kole 68. ročníku byla zadána následující úloha:

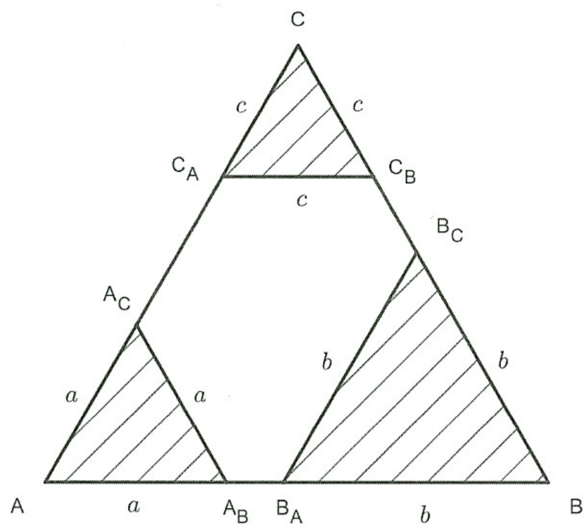
Najděte maximální hodnotu výrazu

$$a^2+b^2+c^2$$

pro reálná čísla a, b, c taková, že všechna tři čísla $a+b$, $b+c$, $c+a$ jsou z intervalu $\langle 0,1)$.

Řešení. Autorské řešení najdete na webu matematické olympiády: `http://www.matematickaolympiada.cz/media/5433615/a68ii.pdf`

Zajímavý vhled do úlohy nám může poskytnout následující geometrická interpretace:



Obr. 1: Geometrická interpretace úlohy – vyšrafovaná část zachycuje obsah, o jehož maximalizaci usilujeme

Mějme rovnostranný trojúhelník ABC o straně délky 1. Zvolme na jeho straně AB bod A_B a následně na jeho straně AC uvažme bod A_C tak, aby AA_BA_C byl rovnostranný trojúhelník o straně délky a. Analogicky definujeme trojúhelníky BB_CB_A a CC_AC_B (viz obr. 1).

Všimněme si, že když jsou tyto tři trojúhelníky disjunktní, platí podmínka ze zadání, tj. součty $a+b$, $b+c$, $c+a$ jsou z intervalu $\langle 0,1)$.

Nyní se podívejme na jejich obsahy. Součet obsahů těchto tří trojúhelníků S je roven

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{\sqrt{3}}{4}b^2+\frac{\sqrt{3}}{4}c^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

Je tedy zřejmé, že výraz $a^2+b^2+c^2$ bude maximální, když bude maximální obsah trojúhelníků AA_BA_C, BB_CB_A a CC_AC_B. Vzhledem k podmínce, že trojúhelníky musí být disjunktní, je zřejmé, že nemohou mít dohromady větší obsah než trojúhelník ABC o straně 1. To nastane, bude-li jedna z proměnných rovna 1 a zbylé dvě 0. Z tohoto důvodu je

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+c^2)\leq S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Tedy $a^2+b^2+c^2\leq 1$.